Einschaliges Hyperboloid

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, MuPAD 4,   Juni 08 Update 29. Juni 08
Web: http://haftendorn.uni-lueneburg.de   www.mathematik-verstehen.de
++

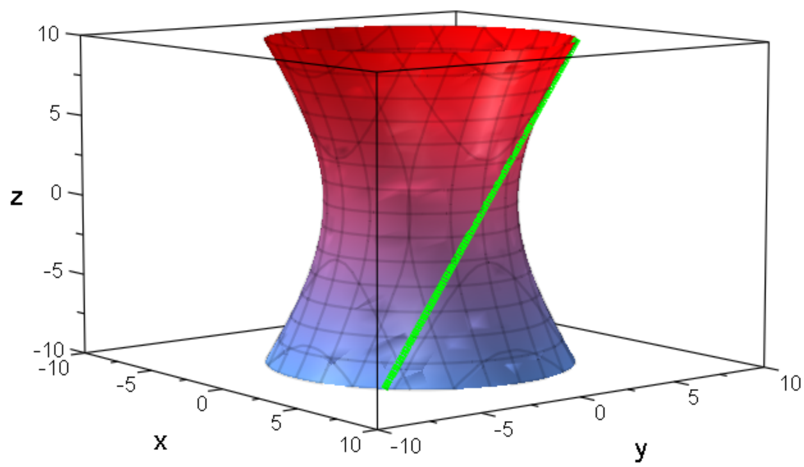
Eine Gerade, die windschief zur z-Achse ist, dreht sich um die z-Achse.
Erst ist hier das Ergebnis gezeichnet.

```
f:=4:c:=2:
hy:=plot::Implicit3d(x^2/f^2+y^2/f^2-z^2/(f^2*c^2)=1,
      x=-10..10,y=-10..10,z=-10..10, Mesh=[20,20,20]):
ger:=plot::Curve3d([f,r,r*c],r=-5..5,
     LineWidth=1,LineColor=[0,1,0]);
```

$$\text{plot::Curve3d}([4,\, r,\, 2\cdot r],\, r = -5..5)$$

Rotations-Hyperboloid mit erzeugender Gerade, letztere in Parameterdarstellung

```
plot(hy,ger)
```

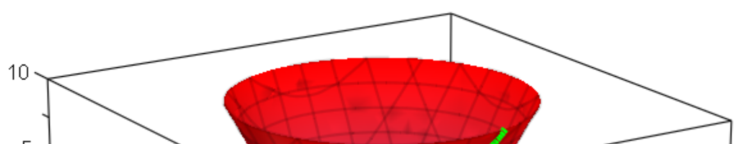


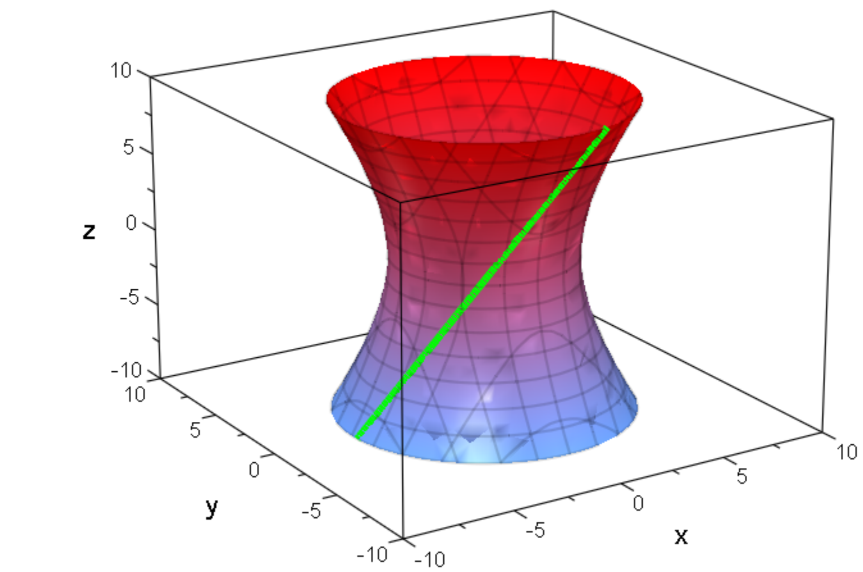
Nun soll die Gerade sich drehen um die z-Achse

```
A:=matrix([[cos(t),-sin(t),0],[sin(t),cos(t),0],
[0,0,1]]);
```

$$\begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
gera:=plot::Curve3d([f*cos(t)-r*sin(t),f*sin(t)+r*cos(t)
,r*c],r=-5..5, t=0..2*PI, LineWidth=1,
LineColor=[0,1,0]):
plot(hy,gera)
```



animieren durch Anklicken!

Natürlich ist der Einheitsvektor der z-Achse der Eigenvektor der Matrix A zum Eigenwert 1.

```
Ev:= linalg::eigenvectors(A)
```

$$\left[\left[\cos(t)-\sin(t)\cdot i,\ 1,\ \left[\begin{pmatrix}-i\\1\\0\end{pmatrix}\right]\right],\ \left[\cos(t)+\sin(t)\cdot i,\ 1,\ \left[\begin{pmatrix}i\\1\\0\end{pmatrix}\right]\right],\ \left[1,\ 1,\ \left[\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right]\right]\right]$$

Volumenbrechnung

Für y=0 wird nach x^2 aufgelöst, der dann rechts stehende Term ist der, der über z zu integrieren ist.

```
hold(x^2/f^2+y^2/f^2-z^2/(f^2*c^2)=1);
hold(x^2=f^2+z^2/c^2)
```

$$\frac{x^2}{f^2}+\frac{y^2}{f^2}-\frac{z^2}{f^2\cdot c^2}=1$$

$$x^2=f^2+\frac{z^2}{c^2}$$

```
2*PI*int(f^2+z^2/c^2, z);
2*PI*int(f^2+z^2/c^2, z=0..10);
Vhyp:=float(%/PI)*PI
```

$$\frac{\pi\cdot z\cdot\left(z^2+192\right)}{6}$$

$$\frac{1460\cdot\pi}{3}$$

$$486.6666667\cdot\pi$$

Berechnung des oberen Radius bei Höhe 10 von der Mitte aus.

```
hyp:=x^2/f^2+y^2/f^2-z^2/(f^2*c^2)=1
```

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{64}=1$$

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{64}=1$$

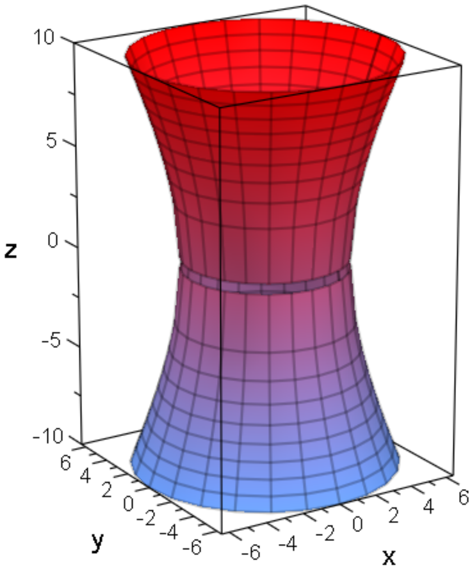
```
solve((hyp|z=10)|y=0,x);
solve((hyp|z=-10)|y=0,x);
```

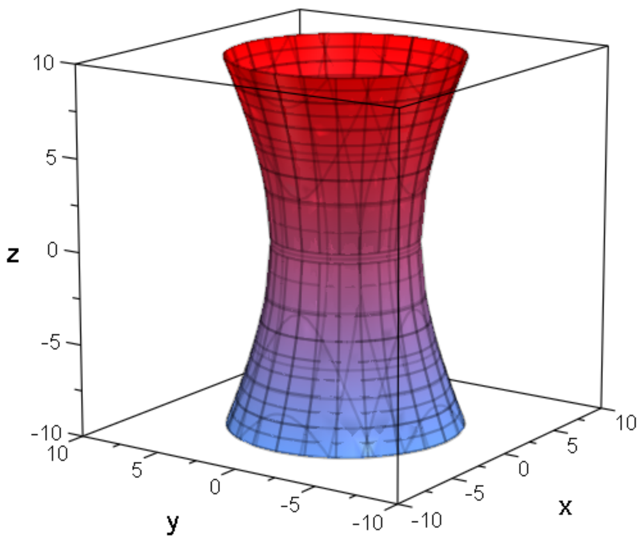
$$\{-\sqrt{41}, \sqrt{41}\}$$

$$\{-\sqrt{41}, \sqrt{41}\}$$

Das durch Rotationsbilder erzeugte Hyperboloid passt genau.

```
ob:=plot::ZRotate(c*sqrt(x^2-f^2),x=0..sqrt(41)):
unt:=plot::ZRotate(-c*sqrt(x^2-f^2),x=0..sqrt(41)):
plot(ob,unt);
plot(ob,unt, hy)
```





Volumen eines umfassenden Zylinders
oder eines innen liegenden Kegels

```
Vzyl:=PI*41*20;
Vkeg:=2*PI*41*10/3;
```

```
Vkeg:=2*PI*41*10/3;
2.0*PI*41*10/3;
```

$$820 \cdot \pi$$

$$\frac{820 \cdot \pi}{3}$$

$$273.3333333 \cdot \pi$$

Berechnung der beiden Kegelstümpfe
kleinerer Radius

```
solve((hyp|z=0)|y=0,x)
```

$$\{-4, 4\}$$

Kegelstumpf-Volumenformel

```
hold(Vst=PI/3*(R^2+r*R+r^2)*h)
```

$$Vst = \frac{\pi}{3} \cdot \left(R^2 + r \cdot R + r^2\right) \cdot h$$

2 solche Stümpfe

```
2*float(1/3*(41+4*sqrt(41)+16)*10)*PI;
Vhyp
```

$$550.7499797 \cdot \pi$$

$$486.6666667 \cdot \pi$$

Das passt sehr schön so.