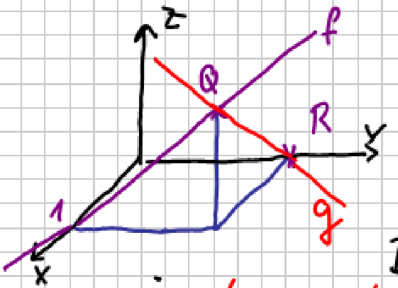
Hyperbolisches Paraboloid



Q läuft auf der Führungsgeraden f.
R läuft auf der y-Achse so, dass die Gerade $g = QR$ stets parallel zur x-z-Ebene ist.
Dann ist die Ortsfläche von g ein hyperbolisches Paraboloid.

Ha08

Beweis $\vec{Q} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ $\quad \vec{R} = \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad f: \; \vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ m \end{pmatrix}$

$Q \in f \Rightarrow \begin{matrix} u = 1 \\ v = s \\ w = s \cdot m \end{matrix}$ $\quad g: \; \vec{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ 0 \end{pmatrix} + t(\vec{Q} - \vec{R})$

t und v sind Parameter. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ mv \end{pmatrix}$ also $\begin{matrix} x = t \\ y = v \\ z = mtv \end{matrix}$

Für eine explizite Darstellung $z = f(x,y)$ sind t und v zu eliminieren: also $\underline{\underline{z = mxy}}$

Drehung um 45° um die z-Achse

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ mxy \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ mxy \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2} \begin{pmatrix} x - y \\ x + y \\ \sqrt{2}\, mxy \end{pmatrix} \text{ also } \begin{matrix} \bar{x} = (x-y)\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \bar{y} = (x+y)\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \bar{z} = mxy \end{matrix}$$ | auflösen nach x und y

$$\left.\begin{matrix} \sqrt{2}(\bar{x} + \bar{y}) = x \cdot 2 \\ \sqrt{2}(\bar{y} - \bar{x}) = y \cdot 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{\bar{z} = m \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} (\bar{x} + \bar{y})(\bar{y} - \bar{x}) = \frac{1}{2} m (\bar{y}^2 - \bar{x}^2)}$$

In jeder Höhe $\bar{z} \neq 0$ ergeben sich also Hyperbeln.

$$\left.\begin{matrix} \text{Die Schnitte } \perp x\text{-Achse}, \; x = c & \Rightarrow & z = \frac{1}{2} m y^2 - c^* \\ \text{" \quad " } \perp y \text{ "} \quad y = c & & z = -\frac{1}{2} m x^2 + c^* \end{matrix}\right] \text{Parabeln}$$

Eigenwert ein Kongruenzabb. ist immer 1
Eigenvektor dieser Drehung ist natürlich die z-Achse.

$\begin{matrix} \cos\varphi = c \\ \sin\varphi = s \end{matrix}$ $\quad |D - \lambda E| = \begin{vmatrix} c-\lambda & -s & 0 \\ s & c-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} c-\lambda & -s \\ s & c-\lambda \\ 0 & 1-\lambda \end{matrix} = (c-\lambda)^2(1-\lambda) + 0 + 0 - 0 - 0$

$\qquad - (1-\lambda)\, s\, (-s)$

$= (1-\lambda)\left[c^2 - 2c\lambda + \lambda^2 + s^2\right] = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2c\lambda + 1) =$ char. Polynom

Char. Polynom $= 0 \iff \lambda = 1 \vee \underbrace{\lambda^2 - 2c\lambda + 1 = 0}_{\text{keine reelle Lös.}}$