

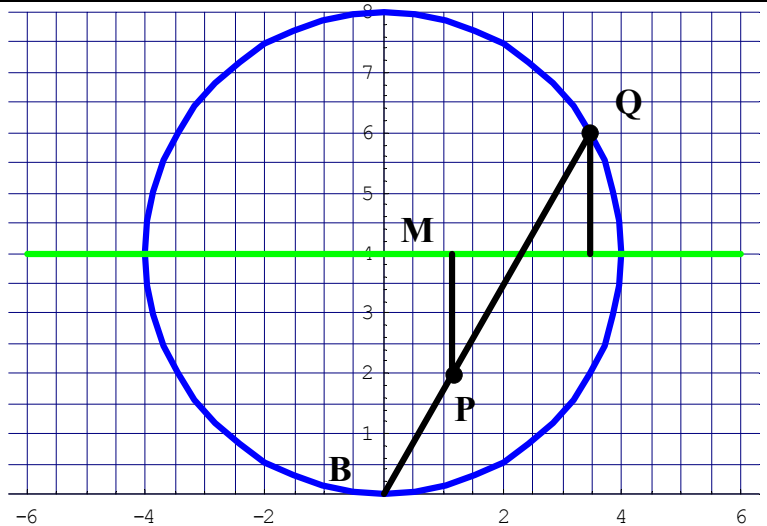
### Aufgabe 1

#### Algebraische Kurven

##### a) Konstruktion

P liegt auf der Geraden BQ und hat von der waagerechten Geraden durch M denselben Abstand wie Q.

Wenn Q auf dem Kreis wandert, bewegt sich P auf einer "Kissoide", einer "Efeu-Kurve".

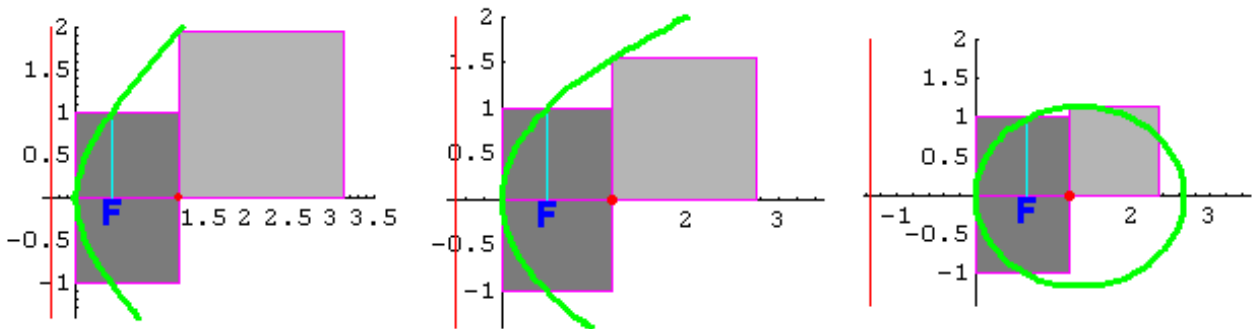


Rücken Sie Q karoreihenweise auf dem Kreis und erzeugen Sie weitere Orte für Punkt P durch Abzählen von Karoreihen. Äußern Sie sich zur Form und ggf. Asymptote der Efeukurve.

b) Leiten Sie die kartesische Gleichung her. Zur Sicherheit:  $(8 - y) x^2 = y^3$

c) Leiten Sie daraus die Polargleichung her.

d) Beziehen Sie die folgenden Abbildungen auf die allgemeine Scheitelgleichung der Kegelschnitte.



d) Nennen Sie zwei wesentlich verschiedene Erzeugungsweisen von Kegelschnitten und äußern Sie sich -evt. unterstützt von Skizzen- zu Realisierungsmöglichkeiten in der Schule.

### Aufgabe 2 Analysis: Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Taylorreihen...

Es geht um die Funktionen  $f_k$  mit  $f_k(x) = \begin{cases} x^k \cos(\frac{1}{x}) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$  und  $k \in \mathbb{N}_0$ .

a) Entwickeln Sie den Graphen von  $f_0$  aus graphischer Verkettung. Begründen Sie damit wesentliche Eigenschaften. Geben Sie alle Extremstellen als Term an.

b) Skizzieren freihand Sie den Graphen von  $f_1$  unter Verwendung von  $f_0$  als Produkt. Begründen Sie damit wesentliche Eigenschaften.

c) Geben Sie begründet für  $k \in \{0, 1, 2, 3\}$  an, ob  $f_k$  überall stetig ist. Wie sehen die Graphen für höhere k in der Nähe von 0 aus?

**Fortsetzung Aufgabe 2**

d) Geben Sie begründet für  $k \in \{0, 1, 2, 3\}$  an, ob  $f_k$  differenzierbar ist und ob die Ableitung, falls sie existiert, überall stetig ist.

f) Rechts ist die Normalparabel, der

Graph von  $f_2$  und seine Asymptote dargestellt.

Bestimmen Sie die Asymptote, indem Sie in der Taylorreihe des Kosinus

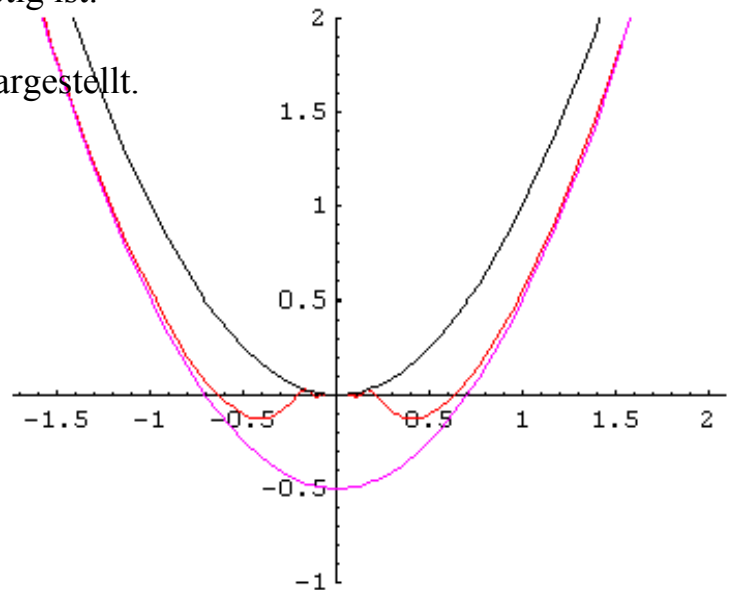
$x \rightarrow \frac{1}{x}$  substituieren.

g) Zeigen Sie mit der Regel von l'Hospital, dass

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x \cos(x) - x) = 0 \text{ ist.}$$

Was heißt das für die Asymptote

von  $f_1$  ?

**Aufgabe 3 Analysis, Polynome**

a) Gesucht ist ein zum Ursprung punktsymmetrisches Polynom 3. Grades, das die Gerade  $g$  mit  $g(x) = x - 3$  in

$B(2/-1)$  berührt.

Ergebnis zur Sicherheit:

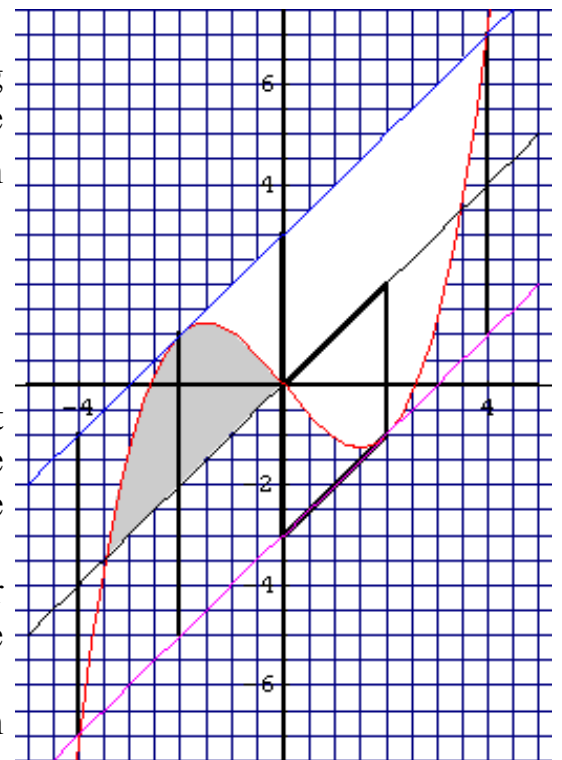
$$f(x) = \frac{3}{16}x^3 - \frac{5}{4}x$$

a) Durch Berührungspunkt, Tangente und Wendepunkt ist in der gezeichneten Weise eine Kastenzelle definiert. Bestätigen Sie, dass der Graph die obere Kastenecke trifft.

b) Berechnen Sie die Schnittstelle mit der Kastenmittellinie. Bestimmen Sie die dunkelgraue Fläche durch Integration.

c) Das Verhältnis der hellen zur dunkelgrauen Fläche ist 3 : 1 ist. Wie groß sind sie dann zusammen und welchen Anteil des gesamten Kastens nehmen sie ein?

d) Mit welcher Grundidee überträgt man einmal nachgewiesene Eigenschaften auf andere Polynome 3. Grades? Skizzieren Sie freihand zwei wesentlich verschiedene andere Fälle mitsamt der gezeigten Flächeneigenschaft (ohne Terme, ohne Rechnungen).

**Anmerkung:**

Die Aufgabenteile werden entsprechend ihrem Anspruch und Aufwand mit Punkten bewertet, daher sind die Aufgaben und Aufgabenteile nicht gleich gewichtig. Sie müssen aus den Sachgebieten Analytische Geometrie **und** Analysis angemessene Anteile bearbeiten.

Unter dieser Voraussetzung reichen etwa 40% der Punkte um zu bestehen.

**Gutes Gelingen!**