Aufgabe 2 Analysis: Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Taylorreihen...

Es geht um die Funktionen f_k mit $f_k(x) = \begin{cases} x^k \cos(\frac{1}{x}) & \textit{für } x \neq 0 \\ 0 & \textit{für } x = 0 \end{cases}$ und $k \in \mathbb{N}_0$.

a) Entwickeln Sie den Graphen von f_0 aus graphischer Verkettung. Begründen Sie damit wesentliche Eigenschaften. Geben Sie alle Extremstellen als Term an.

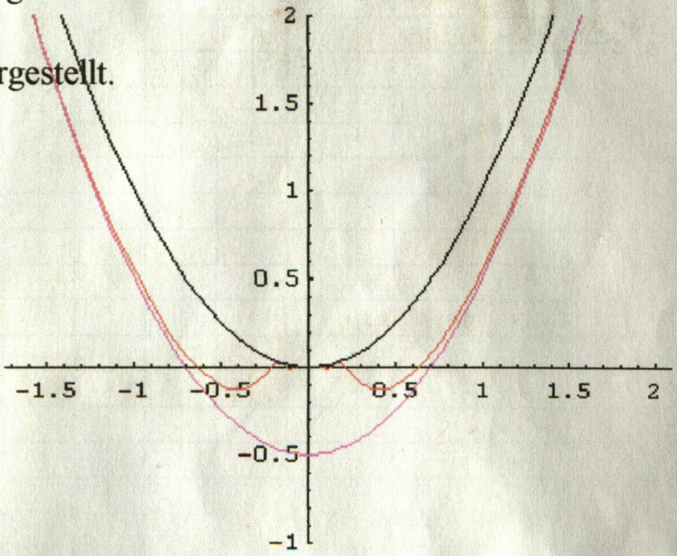
b) Skizzieren freihand Sie den Graphen von f_1 unter Verwendung von f_0 als Produkt. Begründen Sie damit wesentliche Eigenschaften.

c) Geben Sie begründet für $k \in \{0,1,2,3\}$ an, ob f_k überall stetig ist. Wie sehen die Graphen für höhere k in der Nähe von 0 aus?

Fortsetzung Aufgabe 2

d) Geben Sie begründet für $k \in \{0,1,2,3\}$ an, ob f_k differenzierbar ist und ob die Ableitung, falls sie existiert, überall stetig ist.

e) Rechts ist die Normalparabel, der Graph von f_2 und seine Asymptote dargestellt. Bestimmen Sie die Asymptote, indem Sie in der Taylorreihe des Kosinus $x \to \frac{1}{x}$ substituieren.



f) Zeigen Sie mit der Regel von l'Hospital, dass

$\lim_{x\to\infty}(x\cos(\frac{1}{x}) - x) = 0$ ist.

$\frac{1}{x}$ stand da nicht

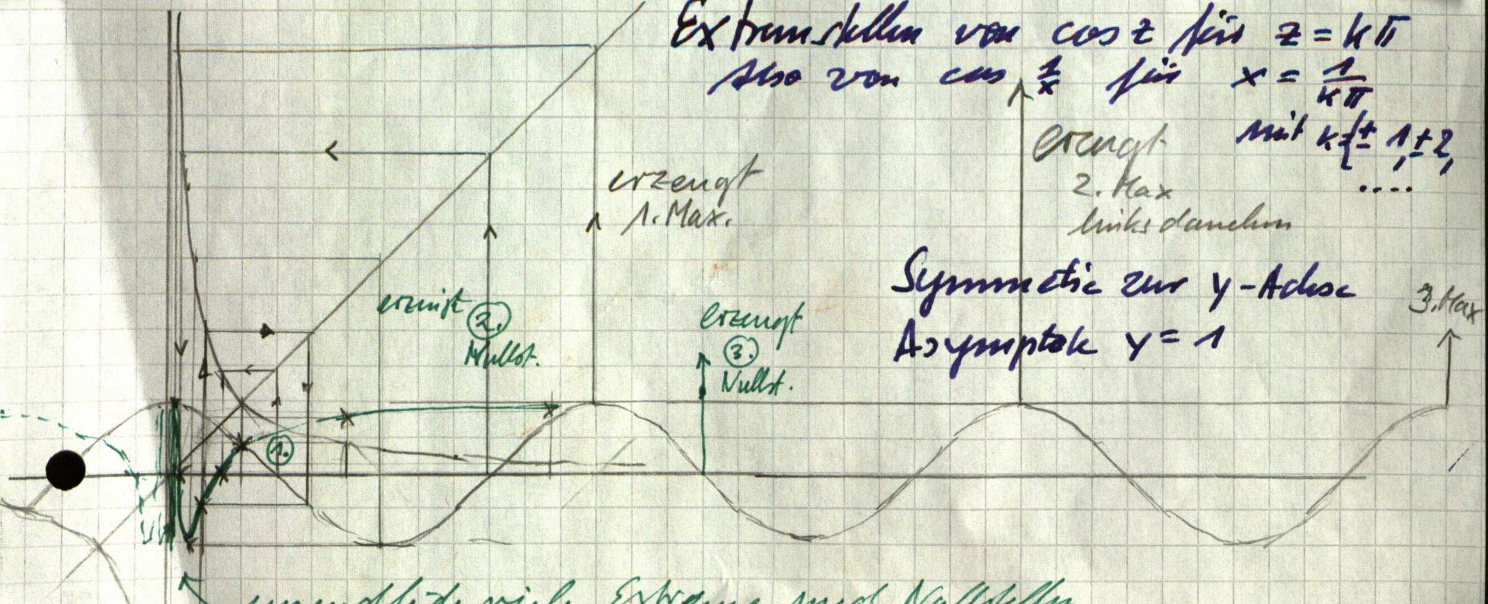
Was heißt das für die Asyptote von f_1 ?

Extremstellen von $\cos z$ für $z = k\pi$

Also von $\cos\frac{1}{x}$ für $x = \frac{1}{k\pi}$ mit $k \in \{\pm 1, \pm 2, \ldots\}$

Symmetrie zur y-Achse

Asymptote $y = 1$



unendlich viele Extrema und Nullstellen

weiter d)

$\boxed{4}$ f_2 mit $f_2(x) = x^2 \cos\frac{1}{x}$

ebenso für höhere Potenzen $\boxed{zu 4}$ $\Big\{$ Differenzenquotient $\frac{h^2 \cos\frac{1}{h}}{h} = h \cos\frac{1}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$

Grenzwert existiert

Also ist f_2 differenzierbar in $x=0$ und damit überall

$\boxed{5}$ $f_2'(x) = 2x \cos\frac{1}{x} + x^2 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \sin\frac{1}{x}$

$= 2x \cos\frac{1}{x} + \underbrace{\sin\frac{1}{x}}$

Schwankt in $[-1, 1]$ beliebig. $\Rightarrow$ f_2' ist unstetig

$\boxed{6}$ f^3 Differenzialquotient existiert in $x=0$

sonst $f_3'(x) = 3x^2 \cos\frac{1}{x} + x^3 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(-\sin\frac{1}{x}\right)$

$\downarrow_{x\to 0}$ 0 $\qquad + \; x \sin\frac{1}{x}$ $\downarrow_{x\to 0}$ 0

$\Rightarrow$ f_3' ist stetig. das gilt für alle höheren Potenzen auch. $\boxed{zu 6}$

e) $f_2(x) = x^2 \cdot \cos\underbrace{\frac{1}{x}}_{z} = x^2\left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots\right)$

$= \underbrace{x^2 - \frac{1}{2!}}_{\text{Asymptote}} + \underbrace{\frac{1}{x^2 4!} - + \dots}_{x \text{ stets im Nenner}}$

$a(x) = x^2 - \frac{1}{2}$

f) $\lim_{x\to\infty} \left(x \cos\frac{1}{x} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\cos\frac{1}{x} - 1}{\frac{1}{x}} \underset{l'H}{=} \lim \frac{-\frac{1}{x^2} \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{-\frac{1}{x^2}}$

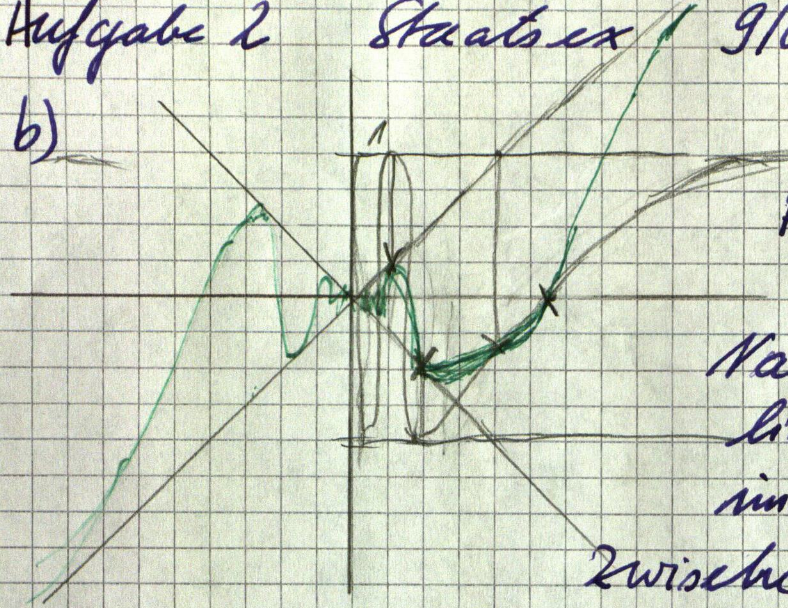
$= \lim_{x\to\infty} \sin\frac{1}{x} = 0$

Das heißt, $y = x$ ist wirklich Asymptote.

Tippfehler es stand x auf Aufg. blatt mit Stud. freundlicher Wertung.

Aufgabe 2 Staatsex. 9/03

b)



$f_1(x) = x \cos\frac{1}{x}$

Punktsymmetrisch zum Ursprung

Nach innen zu unendlich viel Berührstellen mit $y = x$ und $y = -x$

Zwischen diesen Geraden wird der Graph "geklemmt".

Außen, für große x ist $\cos\frac{1}{x} \approx 1$ also

$f_1(x) \approx x$ Asymptote

c) f_0 unstetig in $x=0$, denn man kann

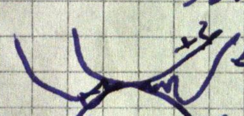
$\boxed{1}$ mit Nullfolgen (x_n) mit $(f_0(x_n))$ jeden Wert zw. 0 und ± 1 erreichen.

$\boxed{2}$ f_1 ist stetig in $x=0$ (und auch sonst), denn die Fkt.-Werte von Nullfolgen streben auch gegen 0.

Bei f_2 wird der Graph zwischen $y=x^2$ und $y=-x^2$

$\boxed{\text{zu 2}}$

eingeklemmt, damit gilt das für f_1 gesagt erst recht. Also f_k mit $k \geq 1$ ist überall stetig. (aber nicht "durchzeichenbar")



Wellen werden zw. immer höhere Potenzfkt. geklemmt.

d) f_1 Differenzenquotient

$\boxed{3}$ $\frac{f_1(0+h) - f_1(0)}{h} = \frac{h \cos\frac{1}{h} - 0}{h} = \cos\frac{1}{h} \xrightarrow{h \to 0} \nexists$

Damit ist f_1 in $x=0$ nicht diff'bar.

$f_k(0)=0$

	f in $x=0$	Differenzialquot. in $x=0$	f' in $x=0$	f' in U_0	f' (diff'bar ?) in x_0
$f_0(x)=\cos\frac{1}{x}$	unstetig $\boxed{1}$ in U_0 beschr.	$\nexists$	Def.Lücke	unbeschr.	./.
$f_1(x)=x\cos\frac{1}{x}$	stetig $\boxed{2}$	$\nexists$ $\boxed{3}$	Def.Lücke	unbeschr.	nicht diff'bar $\boxed{3}$
$f_2(x)=x^2\cos\frac{1}{x}$	stetig	$\exists$ $\boxed{4}$	unstetig $\boxed{5}$	(beschr.)	diff'bar $\boxed{4}$
$f_3(x)=x^3\cos\frac{1}{x}$	stetig $\boxed{\text{zu } 2}$	$\exists$ $\boxed{\text{zu } 4}$	stetig $\boxed{6}$	(")	diff'bar.

Erläuterung

Anmerkung: aus der Familie $x^k\cos\frac{1}{x}$ waren einige Fälle in der Vorlesung "Kernthemen" behandelt.

Hier waren die Nachweise $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, … $\boxed{6}$ angesprochen.
Einen Nachweis aus jeder Gruppe und sonst verbale Analogisierungen habe ich erwartet.