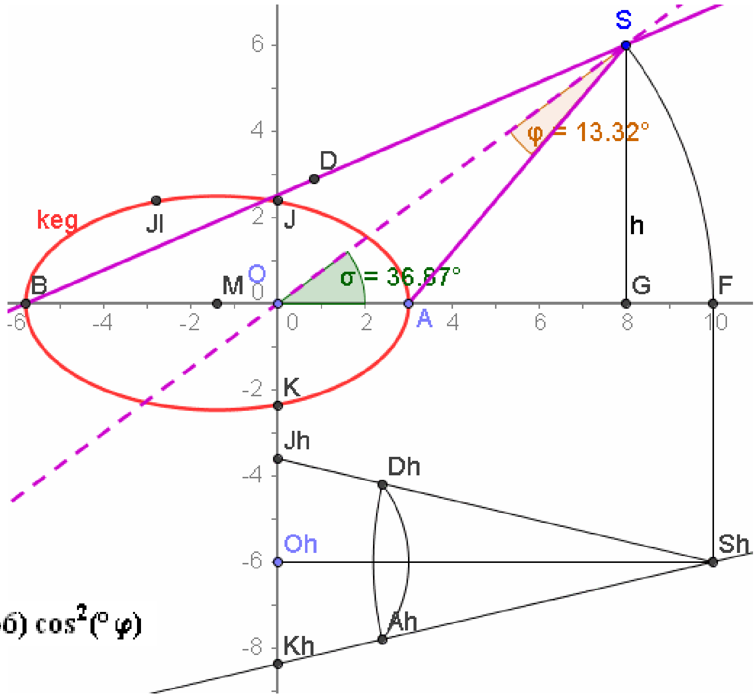
Universität Lüneburg Mathematik NAME:______________________________

1. Staatsprüfung für das Lehramt an Berufsbildenden Schulen

Prof. Dr. Dörte Haftendorn **März 2005**

Aufgabe 1 **Analytische Geometrie**

Die x-y-Ebene schneidet einen Kegel, dessen Achse durch den Ursprung verläuft und dessen Spitze über der x-Achse liegt. $\vec{s} = \begin{pmatrix} g \\ 0 \\ h \end{pmatrix}$



1.1) Begründen Sie, dass beliebige Punkte auf dem Kegel die folgende Gleichung erfüllen müssen.

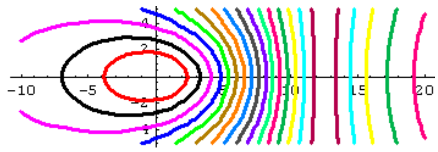
$$\vec{s} \cdot \left(\vec{s} - \vec{p}\right) = \left|\vec{s}\right| \cdot \left|\vec{s} - \vec{p}\right| \cdot \cos(\varphi)$$

1.2) Zeigen Sie, dass die Formel

$$(8\,(8 - x) + 36)^2 == 100\,((8 - x)^2 + y^2 + 36)\cos^2(°\,\varphi)$$

die passende Realisierung für den Schnitt des rechts dargestellten Kegels mit der x-y-Ebene ist. $(g = 8, h = 6)$

1.3) Mit `alle = Table[schnitte, {φ, 10, 90, 5}]` zeichnet Mathematica aus Gleichung 1.2) nebenstehende Graphen. Deuten Sie die Graphen durch eine Veränderung der Kegelform. Unter welcher Bedingung entsteht eine Parabel? Ist bei den gezeichneten Graphen eine Parabel dabei? In der oben dargestellten GeoGebra-Datei kann man S bewegen. D ist durch Spiegeln von A an der Kegelachse erzeugt. Warum kann man keine Parabel erzeugen, wenn man A=(3,0,0) und G=(8,0,0) beibehält und nur h verkleinert?



1.4) Als Kennzahl für Kegelschnitte wird oft $\varepsilon = \dfrac{\cos\varphi}{\cos\sigma}$ verwendet.

Wie heißt diese Zahl? Deuten Sie sie im Zusammenhang mit 1.3).

1.5) Berechnungen (Dezimalzahlen) zum oben gezeichneten Beispiel:

i) Es ist A=(3,0,0) und S=(8,0,6). Berechnen Sie φ und σ.

ii) Berechnen Sie die Koordinaten von B (evt. mit Sinussatz) und bestimmen Sie damit den Mittelpunkt und die große Halbachse der Ellipse.

iii) Die Hilfszeichnung darunter zeigt die von der Kegelachse und der y-Achse aufgespannte Ebene. Die beiden Winkel bei Sh sind φ. Berechnen Sie die Strecke(Oh,Jh). Damit haben Sie die Ordinate von J, einem Punkt der Ellipse.

iv) Bestimmen Sie nun die Gleichung der oben eingezeichneten Ellipse aus einem Ansatz mit der Mittelpunktsgleichung einer nach links verschobenen Ellipse.

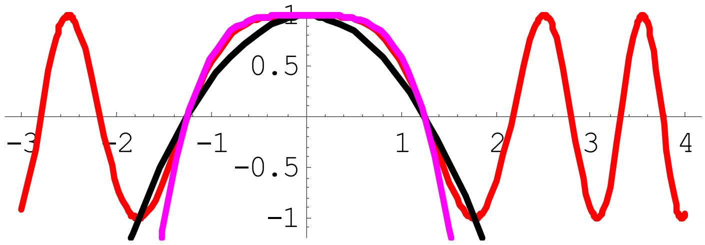
1.6) Deuten Sie grob an, wie man diese Gleichung der Ellipse auch aus Gleichung 1.2) bekommen könnte.

Es folgen 2/3 und 3/3.

Aufgabe 2 **Analysis und Numerik**

Sie sehen rechts die Graphen der Funktion

$\boldsymbol{f}$ mit $\boldsymbol{f(x)=\cos\left(x^2\right)}$ und



zweier Polynome, die zwischen den inneren Nullstellen als Näherung dienen und dieselben Nullstellen haben sollen.

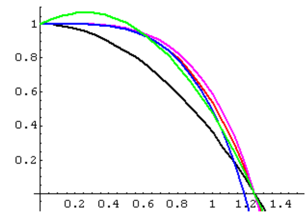
2.1) Erläutern Sie an einer qualitativen Skizze, wie der Graph von $\boldsymbol{f}$ außen aussehen muss.

2.2) Bestimmen Sie einen Term für sämtliche Nullstellen von $\boldsymbol{f}$ und begründen Sie an diesem Term nochmals die in 2.1) gemachten Aussagen.

2.3) Bestimmen Sie die beiden Polynome der Zeichnung. (Fälle b und c in Teil 2.4) und nehmen Sie zur Brauchbarkeit als Näherung Stellung.

2.4) Bei der Frage nach der Fläche zwischen f und der x-Achse zwischen den inneren Nullstellen bezieht man sich sicher sinnvoll zunächst auf den I. Quadranten. Dazu sind hier weitere Näherungsfunktionen vorgeschlagen.

a	f selbst	0.977451
b	Parabel	0.835543
c	Polynom 4.Grad	1.00265
d	Taylor–4.Grad	0.944071
e	Interpol–par	0.980827
f	Kepler	0.980827



Farben wie oben

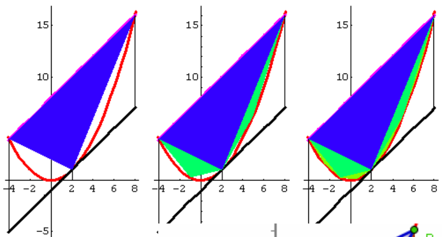
2.4.1) Bestimmen Sie die Taylor-Näherungs-Funktion (4.Grades) (d).

2.4.2) Nennen Sie eine oder zwei Strategien zur Bestimmung des Interpolationspolynoms 2. Grades mit den Stützstellen $\left\{0,\tfrac{1}{2}x_0,\ x_0\right\}$ (nicht durchführen). Welcher Graph gehört dazu? (e)

2.4.3) Berechnen Sie kommentiert die fragliche Fläche mit der Keplerschen Regel.(siehe 2.5.4) , Wert (f). Warum liefert (e) denselben Wert? Alle Flächen-Werte sehen Sie in der Tabelle. Hätte man mit der Keplerschen Regel im Intervall “linke bis rechte Nullstelle” das Doppelte der eben berechneten Wertes (f) erhalten?

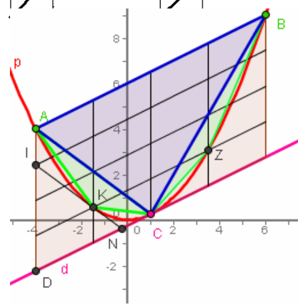
2.4.4) Vergleichen Sie Tabelle und Graphen bezüglich der Güte von “Flächennäherung” und “Fkt-Wert-Näherung”.

2.5) Kepler, der ja noch keine Integralrechnung kannte, hatte die Flächenwerte für die Parabel aus der Exhaustionsmethode des Archimedes. Gezeichnet ist die Parabel $\boldsymbol{y=\tfrac{1}{4}x^2}$.



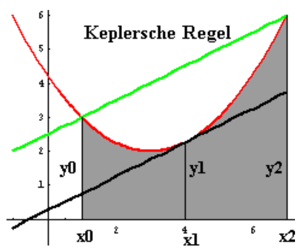
Arbeiten Sie im Folgenden mit dieser Parabel. Warum bedeutet das keine Einschränkung der Allgemeinheit?

2.5.1) Zeigen Sie (mit Analysis), dass die Tangente an einer Stelle c parallel zur Sehne an den Stellen c-r und c+ r ist. Alle weiteren Eigenschaften des “Bärenkastens” können Sie dann ohne Beweis verwenden.



2.5.2) Von dem so gebildeten Bärenkasten BK nimmt das blaue Dreieck -seine Fläche heiße $\boldsymbol{F}$- ersichtlich die Hälfte ein. Begründen Sie elementargeometrisch, dass die beiden grünen Dreiecke zusammen die Größe $\tfrac{1}{4}\boldsymbol{F}$ haben.

2.5.3) Wie kommt man nun zu der Erkenntnis, dass zwischen der Sehne AB und der Parabel $\tfrac{2}{3}$ der Bärenkastenfläche BK liegen? BK nicht berechnen.



2.5.4) Wie kommt nun Kepler zu seiner Regel, die in heutiger Form

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \cong \frac{x_2-x_0}{6}\left(y_0+4y_1+y_2\right) \quad \text{lautet?}$$

Aufgabe 3 Didaktik:

3.1 Zeigen Sie , wie man Umrechnungsformeln mit Sinus und Kosinus durch Betrachtung von Graphen im Unterricht begründen kann:

$\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin(\alpha)$ und ein eigenes Beispiel.

Wägen Sie den didaktischen Nutzen eines solchen Vorgehens gegenüber formalen Beweisen oder reinem Formelsammlungsgebrauch ab?

3.2 Mit welchen Argumenten begegnen Sie Lehrern, die glauben, Kegelschnitte seien unwichtig für die Schule? (Mindestens vier Aspekte)

3.3 Stellen Sie mehrere Arten vor, Kegelschnitte im Unterricht zu behandeln. Variieren Sie dabei die Altersgruppe, den Kontext (Geometrie, Analysis...), die Methoden (handlungsorientiert, Lehrervortrag, entdeckend...) und die Werkzeuge (CAS, DGS, DMS, von Hand, ...).

Anmerkung:

Die Aufgabenteile werden entsprechend ihrem Anspruch und Aufwand mit Punkten bewertet. Daher sind die Aufgaben und Aufgabenteile nicht gleich gewichtig, aber Ihr Einsatz wird gleichmäßig gewertet.

Sie müssen aus den **drei** Sachgebieten angemessene Anteile bearbeiten. Um Ihnen eine gewisse Schwerpunktsetzung zu ermöglichen, reichen etwa 90% für die Bestnote.
Benötigen Sie Werte, die Sie nicht selbst berechnet haben, können Sie Ablesen oder anderweitig vermuten.
Unter dieser Voraussetzung reichen etwa 40% der Punkte um zu bestehen.
Gutes Gelingen!