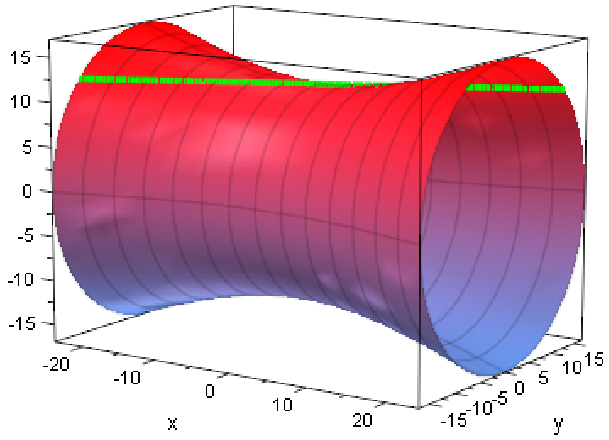
Aufgabe 2 Einschaliges Hyperboloid

Gegeben ist eine Gerade g durch

$\vec{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} c \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Bei Rotation um die x-Achse erzeugt sie als Ortsfläche ein einschaliges Hyperboloid.



In der Zeichnung ist b=12 und c=2. Die folgenden Herleitungen sind mit allgemeinem b und c durchzuführen.

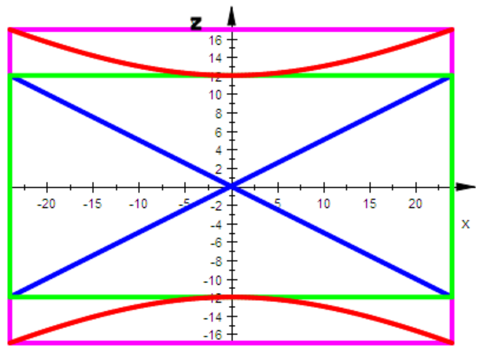
a) Stellen Sie die Matrix D für die Rotation um die x-Achse auf und bilden Sie die Gerade g damit ab.

b) Berechnen Sie von Hand den reellen Eigenwert von D und geben Sie den zu erwartenden Eigenvektor an. Warum sind hier keine Überraschungen möglich?

c) Stellen Sie die explizite Gleichung der Ortsfläche auf.

d) Weisen Sie nach, dass die Schnitte senkrecht zu den Achsen die erwartete Form haben. Unterscheiden Sie ggf. zwei Bereiche.

e) Gezeichnet ist hier in der x-z-Ebene der Querschnitt des Rotations-Hyperboloids mit Asymptoten und einem inneren und äußeren Zylinder. Zeigen Sie, dass die Schnitthyperbel in der rechten oberen Ecke die z-Ordinate $\sqrt{2} \cdot b$ hat.



f) Berechnen Sie erläutert das Rotationsvolumen des Hyperboloids, des inneren und des äußeren Zylinders mit diesen Abmessungen mit allgemeinem b und c.

g) Die Verhältnisse dieser Werte sind einfache Brüche. Stellen Sie drei Verhältnisse auf und verbalisieren Sie ihre Ergebnisse.

Anmerkung: Sollten Ihnen nicht alle Berechnungen glücken, entnehmen Sie aus den Zeichnungen, was Sie brauchen – möglichst allgemein- und machen sinnvoll weiter.