Staatsexamen Herbst 08 ② Einschaliges Hyperboloid.

Gerade $\vec{p} = \begin{pmatrix}0\\0\\b\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}c\\1\\0\end{pmatrix}$ a) Rotation um x-Achse $D = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$

x-A. fest ↑ Rot. y-z Ebene

zu a) Abbildungsgleichung

$$\vec{p}\,' = D\vec{p} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}sc\\ s\\ b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}sc\\ s\cos\varphi - b\sin\varphi \\ s\sin\varphi + b\cos\varphi\end{pmatrix}$$

s und φ sind die variablen Parameter ⇒ Fläche im 3D-Raum
b und c " Form-Parameter.

b) Eigenwertgleichung $D\vec{v} = \lambda\vec{v}$ Da die Drehung eine Kongruenzabb. ist, ist $\lambda = 1 \vee \lambda = -1$ zu erwarten.

Als Eigenrichtung ist die x-Achse klar $\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

Ansatz $D\vec{v} = \lambda\vec{v} \Leftrightarrow (D - \lambda E)\vec{v} = \vec{o}$ dieses homogene GLS hat höchstens dann nichttriviale Lösungen, wenn $\det(D - \lambda E) = 0$ Ansatz also λ so bestimmen dass das gilt.

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & 0\\ 0 & \cos\varphi - \lambda & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi - \lambda\end{vmatrix} = (1-\lambda)(\cos\varphi - \lambda)^2 + (1-\lambda)(\sin\varphi)^2 = 0$$

Also $(1-\lambda)(\cos^2\varphi - 2\lambda\cos\varphi + \lambda^2 + \sin^2\varphi) = 0$
$(1-\lambda)(1 - 2\lambda\cos\varphi + \lambda^2) = 0$

$\varphi = 0, \varphi = 2\pi \Rightarrow (1-\lambda)(1-\lambda)^2 = 0 \Leftrightarrow 1 = \lambda$
$0 < \varphi < 2\pi$ Die Klammer rechts hat keine Nullstelle.

c) Aus a)
$x = sc$ $\quad x^2 = s^2c^2$
$y = s\cos\varphi - b\sin\varphi$ $\quad y^2 = s^2\cos^2\varphi - 2sb\cos\varphi\sin\varphi + b^2\sin^2\varphi$
$z = s\sin\varphi + b\cos\varphi$ $\quad z^2 = s^2\sin^2\varphi + 2sb\cos\varphi\sin\varphi + b^2\sin^2\varphi$

$s^2 = \frac{x^2}{c^2} \wedge y^2 + z^2 = s^2 + 0 + b^2$

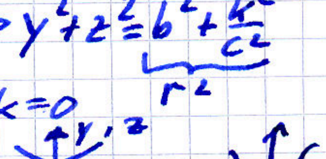
$$-\frac{x^2}{c^2} + y^2 + z^2 = b^2$$

Einschaliges Hyperboloid $-\frac{x^2}{c^2b^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$ Explizite Gleichung der Ortsfläche

d) Schnitte ⊥ x-Achse $x = k$ $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 + \frac{k^2}{c^2b^2} \Leftrightarrow y^2 + z^2 = \underbrace{b^2 + \frac{k^2}{c^2}}_{r^2}$

Kreise mit mindestens Radius $r = b$ bei $x = k = 0$

Schnitte ⊥ y-Achse $y = k$: $\frac{z^2}{b^2} - \frac{x^2}{c^2b^2} = 1 - \frac{k^2}{b^2}$ [Hy

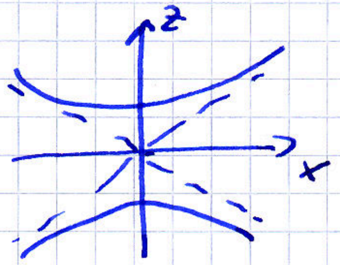


z − " ebenso, wie erwartet.

② -2-

$\frac{z^2}{b^2} - \frac{x^2}{c^2b^2} = \frac{b^2-k^2}{b^2}$ nur für $b>k$

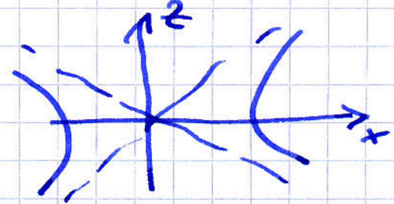
$\Leftrightarrow \quad z^2 - \frac{x^2}{c^2} = b^2-k^2$ und hinreichend große $|z|$



$\frac{x^2}{c^2b^2} - \frac{z^2}{b^2} = \frac{k^2-b^2}{b^2}$

$\frac{x^2}{c^2} - z^2 = k^2-b^2$ nur für $k>b$

nur für hinr. große $|x|$



Für die Schnitte ⊥ z-Achse gilt das Entsprechende.

e) Es geht um den Fall $\left.\begin{matrix}k=0\\ y=0\end{matrix}\right\}$ oben. Also $z^2 - \frac{x^2}{c^2} = b^2$

$x=0 \Rightarrow |z|=b$ Asymptotensteigung $\frac{z^2}{b^2} - \frac{x^2}{c^2b^2} = 1$

$\frac{z^2}{x^2} = \frac{b^2}{x^2} + \frac{1}{c^2} \xrightarrow[x\to\infty]{} \frac{1}{c^2} \Rightarrow m = \frac{1}{c}$

$z = \frac{1}{c}x \wedge z = -\frac{1}{c}x$ sind die Asymptoten

sie haben an der Stelle $x=cb$ die Ordinate b

Hyperbel an der Stelle $x=cb$: $z^2 - \frac{c^2b^2}{c^2} = b^2 \Leftrightarrow z^2 = 2b^2$
$z = \sqrt{2}\,b$ oben.

f) $V_{Rot} = 2\pi\int_0^{cb} f(x)^2\,dx = 2\pi\int_0^{cb} z^2\,dx = 2\pi\int_0^{cb}\left(b^2+\frac{x^2}{c^2}\right)dx$

$= 2\pi\left(b^2x + \frac{1}{3c^2}x^3\right)\Big|_0^{cb} = 2\pi cb\left(b^2 + \frac{1}{3c^2}c^2b^2\right)$

$= 2\pi cb\cdot\frac{2}{3}b^2 = \frac{8}{3}\pi cb^3$

$V_{in} = \pi r^2\cdot h = \pi b^2\cdot 2cb = 2\pi cb^3$

$V_{au} = \pi\cdot 2b^2\cdot 2cb = 4\pi cb^3$

$\cdot 2 \qquad \cdot\frac{4}{3} \qquad \cdot\frac{3}{2}$

g) $\frac{V_{in}}{V_{au}} = \frac{2\pi cb^3}{4\pi cb^3} = 1:2$ der innere Zylinder passt zweimal in den äußeren Zylinder

$\frac{V_H}{V_{au}} = \frac{8\pi cb^3}{3\cdot 4\pi cb^3} = \frac{2}{3}$ das Hyperboloid nimmt 2/3 des äußeren Zylinders ein.

$\frac{V_{in}}{V_H} = \frac{2\pi cb^3\cdot 3}{8\pi cb^3} = \frac{3}{4}$ der innere Zylinder nimmt $\frac{3}{4}$ des Hyperboloids ein.