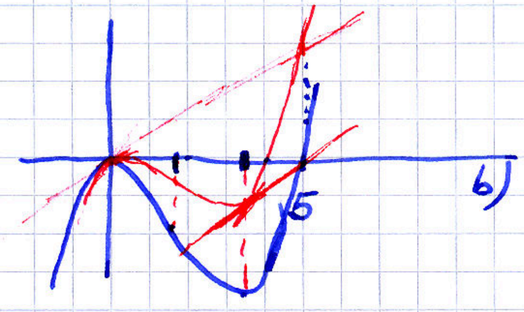
Staatsexamen Herbst 08 1 Extremwerte

Funktionenschar $f_k(x) = \underbrace{x^2(x-5)}_{} + \underbrace{kx}_{}$ $k \geq 0$

a)



Grundform Scherung

NR $f_0\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{25}{9}\left(-\frac{10}{3}\right) = -\frac{250}{27}$

b) Aus Affenkasteneigenschaften

Extr. $(0|0)$ und $\left(\frac{10}{3}\middle| -\frac{500}{27}\right)$

$WP\left(\frac{5}{3}\middle|\frac{-250}{27}\right)$ bleibt bei der Scherung erhalten.

Scherachse ist die y-Achse. Alle Punkte wandern parallel zur y-A.

Der Scherwinkel ist der Steigungswinkel von $\underline{y = kx}$ „Schergerade"

f_k schneidet die Schergerade in $(5|5k)$

Die Schergerade ist Tangente in $(0|0)$

Im Pkt $\left(\frac{10}{3}\middle| f_k\left(\frac{10}{3}\right)\right)$ hat f_k die Steigung k

$(0|0)$ bleibt Nullstelle und es kommen evt in $0 < x < 5$ zwei dazu.

c) Nullstellen: $f_k(x) = 0$ $x^2(x-5) + kx = 0$

$\Leftrightarrow x(x^2 - 5x + k) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \lor x^2 - 5x + k = 0$

$x = 0 \lor x^2 - 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} - k$

$x = 0 \lor x = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{25 - 4k}$

nur reell für $25 - 4k \geq 0$

$25 \geq 4k$

$\frac{25}{4} \geq k$ Also $0 \leq k \leq 6\frac{1}{4}$

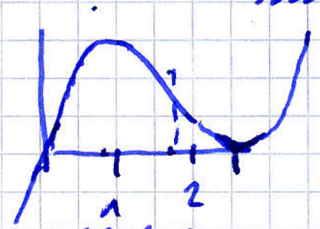
hierfür 3 Nullst.

sonst nur $x = 0$

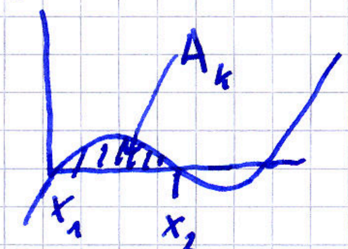
für $k = 6\frac{1}{4}$

dopp. Nst

$x = 2{,}5$

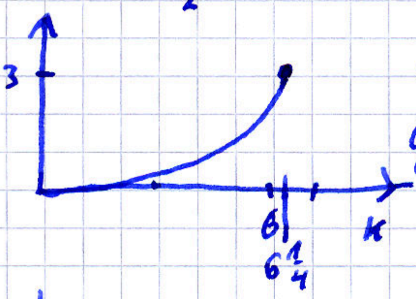


d) linke Nullstellen $x_1 = 0$ $x_2 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{25 - 4k}$



$$A_k = \int_0^{x_2} f_k(x)\,dx = \left[\frac{x^2(3x^2 - 20x + 6k)}{12}\right]_0^{x_2}$$

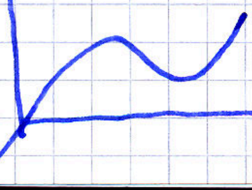
$$= \frac{1}{96}\left(\sqrt{25-4k} - 5\right)^2\left(6k - 25 + 5\sqrt{25-4k}\right)$$



$A_{6\frac{1}{4}} = \frac{625}{192} = 3{,}2552 = A_{max}$

Graph von $A(k)$, bricht im Punkt $\left(6\frac{1}{4}\middle|\frac{625}{192}\right)$ ab.

Für größere k kommt keine begrenzte Fläche mehr zustande

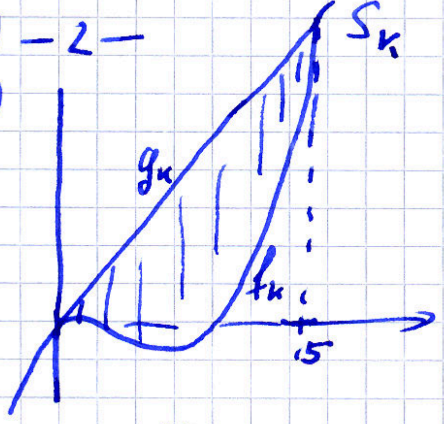


$k > 6\frac{1}{4}$

Datei Abstand-p3.mu4.mn

1

f)



$g_k(x) = kx$

$f_k(x) = x^2(x-5) + kx$

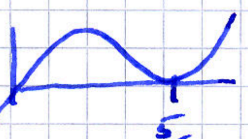
Da es sich um eine Scherung handelt, ist die Fläche für alle k gleich groß. $S_k = (5|5k)$ $\quad f_k(5) = 0+5k = 5k = g_k(5)$

Es gibt also kein besonderes k mit größter Fläche.

Man sieht das auch an der Rechnung $F = \int_0^5 g_k(x) - f_k(x)\,dx$

$F = \int_0^5 x^2(x-5)\,dx \underset{TI}{=} \frac{625}{12}$ unabh. von k $= 52{,}08$

g) $g(x) = x(x-\frac{5}{2})^2$



Unter den Scharkurven muss es die mit $k = 6\frac{1}{4}$ sein.

Rechnerisch: $g(x) = f_k(x) \Leftrightarrow x\left(x^2-5x+\frac{25}{4}\right) = x\left(x^2-5x+k\right)$

$\Leftrightarrow \underline{k = \frac{25}{4}} \lor x = 0$ klar

h) $h^2(x) = (g(x)-2)^2 + (x-2)^2$

$h^2(x) = (x(x-\frac{5}{2})-2)^2 + (x-2)^2$ ← h(x) ist die Wurzel aus diesem Term.

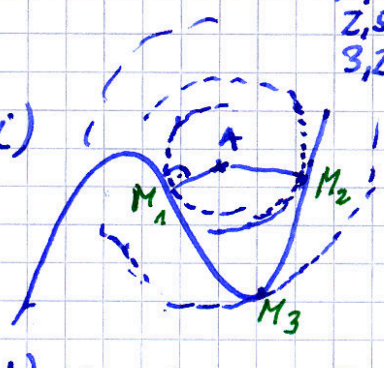
Für die Suche nach Extremstellen ist es aber unnötig, h selbst zu betrachten. Es ist h(x) als ein Abstand von A mit $A \notin$ graph(g) stets positiv. Darum kann h^2 nicht mehr Extrema haben als h und sie liegen an denselben Stellen. Nun kann h^2 mit TI gezeichnet werden und im Grafik-Fenster mit den Befehlen Min/Max

erhält man

x_e	$h^2(x_e)$	$h(x_e)$	
1,406…	0,453…	0,673…	Min
2,553…	4,277…	2,068…	Max
3,238…	1,588…	1,26…	Min

Man hätte auch nsolve($h^{2\prime}(x)=0, x, \ldots$) nutzen können.

i)



Zieht man von A konzentrische Kreise auf, so berühren sie den Graphen von g zunächst in $M_1 \Rightarrow$ 1. Abstands-Minimum dann in $M_2 \Rightarrow$ rechtes Abstands-Minimum dann von außen bei $M_3 \Rightarrow$ relatives Abstandsmaximum.

j) Wie oben im Bild angedeutet, ist es hilfreich, wenn die Abstandskurve beim interaktiven Ziehen von Q direkt entsteht. Dies geht ohne die Rechnungen aus Teil h).

Zusätzlich Tangente und Normale in Q einzeichnen ist sehr hilfreich.