Universität Lüneburg Mathematik NAME:________________________

Erste Staatsprüfung für das Lehramt an Berufsbildenden Schulen

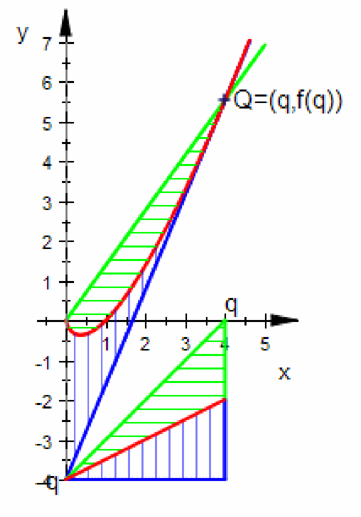
Prof. Dr. Dörte Haftendorn (Mit CAS-Taschenrechner TI-voyage o.ä.) Frühjahr 2007

Aufgabe 1 Analysis

Es geht um die Kurvenschar f_a mit $f_a(x) = (x-a)\cdot\ln(x)$ und die spezielle Funktion f_0 dieser Schar, die mit f benannt wird, also $f(x) = x\cdot\ln(x)$.

a) Entwickeln Sie den Graphen von f aus Bausteinen und untersuchen Sie genau das Verhalten für $x \to 0$ sowohl für f als auch für f'.

b) $Q = (q, f(q))$ sei ein beliebiger Punkt auf dem Graphen von f. Die Ursprungsgerade durch Q und die Tangente an f in Q definieren in der gezeichneten Weise zwei Flächen, deren Flächengröße in dem Bild auch auf andere Weise dargestellt ist. Bestimmen Sie die Tangentengleichung. Berechnen Sie die Flächen, indem Sie f von Hand integrieren und weitere Integrationen mit CAS durchführen. Beweisen Sie die gezeichneten Zusammenhänge.

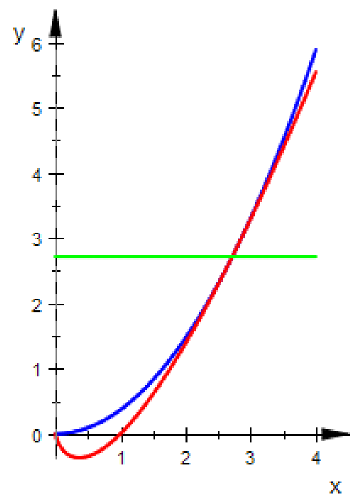


c) Entwickeln Sie die Graphen der Schar f_a für $0 \le a$ aus zwei Bausteinen, schließen Sie daraus auf die Eigenschaften der Scharkurven.

d) Beweisen Sie, dass keine der Scharkurven im Innern des Definitionsbereiches einen Wendepunkt hat.

e) Zeigen Sie für alle a: Das Spiegelbild s der Bausteingeraden an der x-Achse, also $s(x) = a - x$, schneidet f an der Stelle, die auch Extremstelle von f_a ist. Fertigen Sie hierzu eine Extraskizze für $a = 4$ an und bestimmen Sie für diesen Fall den Extrempunkt mit Ihrem numerischen Werkzeug.

f) Dargestellt ist rechts zu f die Parabel p mit Scheitel im Ursprung, die mit f an der Stelle $x = e$ einen gemeinsamen Punkt hat.



i. Stellen Sie die Gleichung von p auf und beweisen Sie, dass die Werte von p nie kleiner werden als die von f. (CAS möglich)

ii. In welchem Verhältnis steht die Fläche zwischen p und f zu der obersten in b) dargestellten Fläche? (CAS möglich)