1. Staatsprüfung für das Lehramt an berufsbildenden Schulen

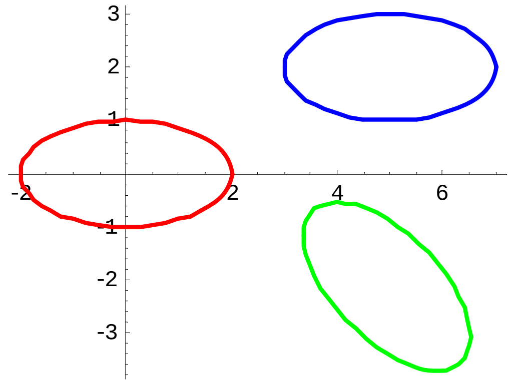
Prof. Dr. Dörte Haftendorn **5. März 2002**

Aufgabe 1 Lineare Algebra und analytische Geometrie

Gegeben ist der Kegelschnitt $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 26\sqrt{2}\,x - 6\sqrt{2}\,y + 74 = 0$

a) Führen Sie eine vollständige Hauptachsentransformation durch.

Zwischenergebnis: $\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 8$



Nummerieren Sie bitte so. Dann bezieht sich die nebenstehende Zeichnung auf Ihr Tun im Folgenden.

b) Geben Sie die Drehgleichung und den Verschiebungsvektor an. Bestimmen Sie den Drehwinkel.

c) Bestimmen Sie die ursprüngliche Lage des Mittelpunktes und die ursprünglichen Hauptachsenrichtungen.

d) Tragen Sie Ihre Ergebnisse aus b) und c) in die rechte Zeichnung ein. Erläutern Sie, was eine Hauptachsentransformation typischerweise tut.

e) Erläutern Sie unterstützt von Freihandskizzen, welche Formen sich bei einer Hauptachsentransformation einer quadratischen Form ergeben können, wenn

- e1) beide Eigenwerte gleich sind?
- e2) beide Eigenwerte verschiedenes Vorzeichen haben?
- e3) genau ein Eigenwert 0 ist?

f) Welche Eigenschaft der orthonormierten Eigenvektormatrix macht die Hauptachsentransformation möglich? Warum wählt man die Matrix A, die die quadratische Form beschreibt, symmetrisch?

Aufgabe 2 Analysis Kurvenschar

Gegeben ist die Funktionenschar $f_a(x) = \dfrac{12}{x^2 + 3a^2}$.

a) Konstruieren Sie für a=1 den Graphen von $\boldsymbol{f_1}$ zeichnerisch **als Verkettung** der Kehrwertfunktion mit einer Parabel. Schließen Sie daraus auf möglichst viele Eigenschaften von $\boldsymbol{f_1}$ und auch der anderen $\boldsymbol{f_a}$.

Falls Sie nicht graphisch verketten, betrachten Sie eine geeignete Parabel und ihren Kehrwert auf intuitive Weise zeichnerisch.

b) b1) Untersuchen Sie auch rechnerisch die Schar auf wesentliche Eigenschaften, darunter auch Wendepunkte und Wendesteigungen. (Ergebnis zu Sicherheit und für das Folgende: $x_w = \pm a$)

Bestimmen Sie die Kurve ***k*** der Wendepunkte.

b2) Übertragen Sie $\boldsymbol{f_1}$ unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse in ein neues Koordinatensystem, in welches Sie auch ***k*** und zwei weitere $\boldsymbol{f_a}$ eintragen.

b3) Vervollständigen Sie Ihre obigen Äußerungen über das Verhalten der Schar.

c) Die Taylorreihenentwicklung für die Funktion f_a um x=0 liefert bis zur 3. Grad den Term $\dfrac{4(3a^2 - x^2)}{3a^4}$

Sie sollen das nicht nachrechnen, aber was sagt Ihnen das? Wie passt es zu ihren Erkenntnissen?

d) Fortsetzung dieser Aufgabe auf der nächsten Seite.

d) Bestimmen Sie für allgemeines a die Fläche unter der Kurve bis zur x-Achse
d1) für den Bereich zwischen den Wendestellen,
d2) für den unbegrenzten Bereich $]-\infty\ ,\ +\infty\ [$.
d3) Zeigen Sie, dass die eben berechneten Flächen im Verhältnis 3:1 stehen.

$$\int \frac{1}{x^2+b^2}\,dx = \frac{1}{b}\,\text{arctan}\left(\frac{x}{b}\right)$$

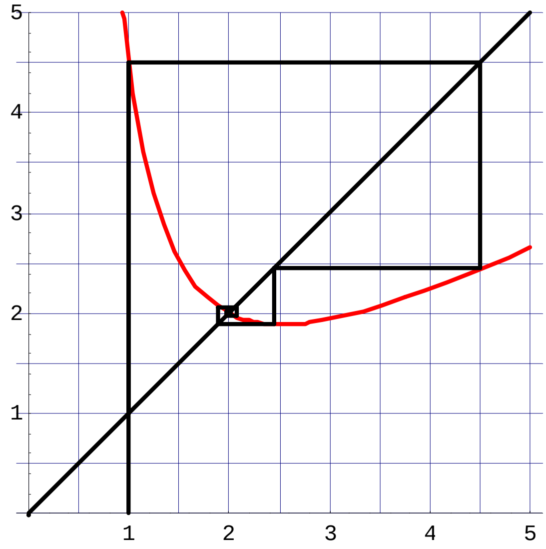
ist der notwendige Formelsammlungseintrag

e) Die gaußsche Glockenkurve hat eine ähnliche Form und ist bekanntlich nicht geschlossen integrierbar. Man könnte versuchen, diese Kurven so “zurechtzustauchen”, dass sie als Näherung für die Gaußkurve brauchbar werden. Was müsste man mindestes anpassen? Warum ist dieser Versuch -zumindest für einen größeren Bereich- zum Scheitern verurteilt?

Aufgabe 3 Folgen, Zahlen, Analysis

Die allgemeine Heron-Formel zur Bestimmung höherer Wurzeln lautet:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{r}{a_n^{k-1}}\right) .$$



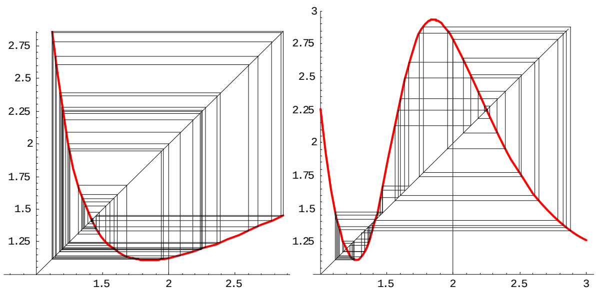
a) Weisen Sie nach, dass diese rekursive Folge für positive r den Fixpunkt $a = \sqrt[k]{r}$ hat.

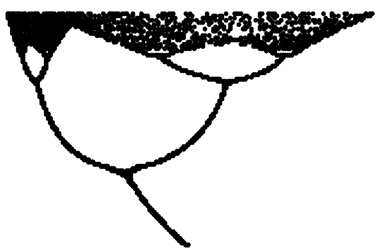
b) Rechts ist die Webdarstellung für r=8 gezeichnet. Um welches k handelt es sich dann?
Verfolgen Sie die hier dargestellten Folgenwerte rechnerisch vier Schritte weit (als Dezimalzahlen).

c) Entwickeln Sie in einer eigenen Zeichnung den Graphen der Trägerfunktion (zu b)) als Mittelwert zweier einfacherer Funktionen.
Wie ändert sich der Graph, wenn k wächst?

d) Der in a) berechnete Fixpunkt ist nicht immer anziehend. Berechnen Sie genau, für welche k und r er anziehend und für welche er abstoßend ist.

e) Für r=8 und k=6 erhält man für die Trägerfunktion f und für die erste Iterierte folgende Graphen:
Erläutern Sie den Zusammenhang und begründen Sie das Verhalten der Folge qualitativ.





f) Bei der logistischen Parabel haben Sie ein “Feigenbaum-Diagramm” kennengelernt.
In gleicher Weise entsteht hier ein “Heron-Feigenbaum-Diagramm”, wenn k variiert wird. Im Bild zeigt die Hochachse k von 3 bis 6.
Erläutern Sie die Graphik.
Wo finden sich die betrachteten Fälle wieder?

Anmerkung: Die Aufgabenteile werden entsprechend ihrem Anspruch und Aufwand mit Punkten bewertet. Für eine Bestnote müssen Sie etwa 80% der Punkte erreichen. Die Unterpunkte der drei Aufgaben sind nur locker miteinander verbunden, sie können einige ganz oder teilweise fortlassen.
Sie müssen aber aus den Sachgebieten Geometrie **und** Analysis angemessene Anteile bearbeiten.

Unter dieser Voraussetzung reichen gut 40% der Punkte um knapp zu bestehen.

Gutes Gelingen!