Aufgabe Rekursive Verfahren, Heron-Verfahren

In den Schulbüchern wird heute häufig das Heron-Verfahren zur Bestimmung von Quadratwurzeln vorgestellt. Es hat die Trägerfunktion f mit $f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{r}{x}\right)$

1) Geben Sie die zugehörige rekursive Formel an und berechnen Sie für r=2 für den Startwert 1 drei Werte.
2) Zeichnen Sie die Trägerfunktion, zeigen und erklären Sie, wie Folgenwerte graphisch gewonnen werden.
3) Beweisen Sie, dass $x_s=\sqrt{r}$ Fixpunkt ist, und dass für alle Radikanden r superschnelle Konvergenz vorliegt.
4) Wie kann man auf Schulniveau erkären, wie Heron die Formel gefunden haben könnte.
5) Für höhere Wurzeln führt die Erklärung aus 4) zu der Trägerfunktion h mit $h(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{r}{x^{k-1}}\right)$.
   Beweisen Sie, dass $x_s=\sqrt[k]{r}$ Fixpunkt ist.
   Skizzieren Sie grob (im Prinzip) diese Annäherung im Spinnweb-Graphen.
6) Im Internet war folgende Trägerfunktion für die Bestimmung höherer Wurzeln zu finden:
   $g(x)=\frac{1}{k}\left((k-1)\,x+\frac{r}{x^{k-1}}\right)$. Nebenstehend sind für $r=8$ und $k=3$ Folgenwerte dargestellt.
   Diese Trägerfunktion stammt aus dem Newtonverfahren für die Nullstelle der Funktion p mit $p(x)=x^k-r$. Damit muss die Konvergenz hier superschnell sein. Zeigen Sie an der zweiten Liste, woran man das sehen kann. Weitere Beweise hierzu sind nicht verlangt.

$$\begin{pmatrix} 7.0 \\ 3.58163265306122448979591836735 \\ 2.10263197737760212322686885161 \\ 1.9560761333311168685878244326 \\ 2.02345247882814541441237794675 \\ 1.98867991823198873538554176856 \\ 2.00575687954076448376347718227 \\ 1.99714632142193374304952132657 \\ 2.00143295854030194681755703764 \\ 1.99928505928760199910618747354 \\ 2.00035785389416484102051485455 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 7.0 \\ 4.72108843537414965986394557823 \\ 3.26703450968485736888193752477 \\ 2.42786261362595455335495921731 \\ 2.07097291007491623271454805873 \\ 2.00240447970591166379611071954 \\ 2.00000288613443049030073112263 \\ 2.0000000000041648779618313663 \\ 2.0000000000000000000000086731 \\ 2.0 \\ 2.0 \end{pmatrix}$$

7) Vergleichen Sie die Konvergenzgeschwindigkeiten beider Verfahren und bestimmen Sie für die h-Formel aus 5) die Steigung im Fixpunkt in Abhängigleit von k. Für welche k liegt Konvergenz vor?
8) Erklären Sie, wie das Feigenbaumdiagramm zur h-Formel aus 5) zustande kommt. Deuten Sie 5) und 7) an dem Diagramm.
   Warum gibt es für die g-Formel aus 6) kein Feigenbaumdiagramm?