

Aufgabe Rekursive Verfahren, Heron-Verfahren

In den Schulbüchern wird heute häufig das Heron-Verfahren zur Bestimmung von

Quadratwurzeln vorgestellt. Es hat die Trägerfunktion f mit $f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{r}{x} \right)$

- 1) Geben Sie die zugehörige rekursive Formel an und berechnen Sie für $r=2$ für den Startwert 1 drei Werte.
- 2) Zeichnen Sie die Trägerfunktion, zeigen und erklären Sie, wie Folgenwerte graphisch gewonnen werden.
- 3) Beweisen Sie, dass $x_s = \sqrt{r}$ Fixpunkt ist, und dass für alle Radikanden r superschnelle Konvergenz vorliegt.
- 4) Wie kann man auf Schulniveau erklären, wie Heron die Formel gefunden haben könnte.
- 5) Für höhere Wurzeln führt die Erklärung aus 4) zu

der Trägerfunktion h mit $h(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{r}{x^{k-1}} \right)$.

Beweisen Sie, dass $x_s = \sqrt[k]{r}$ Fixpunkt ist.

Skizzieren Sie grob (im Prinzip) diese Annäherung im Spinnweb-Graphen.

- 6) Im Internet war folgende Trägerfunktion für die Bestimmung höherer Wurzeln zu finden:

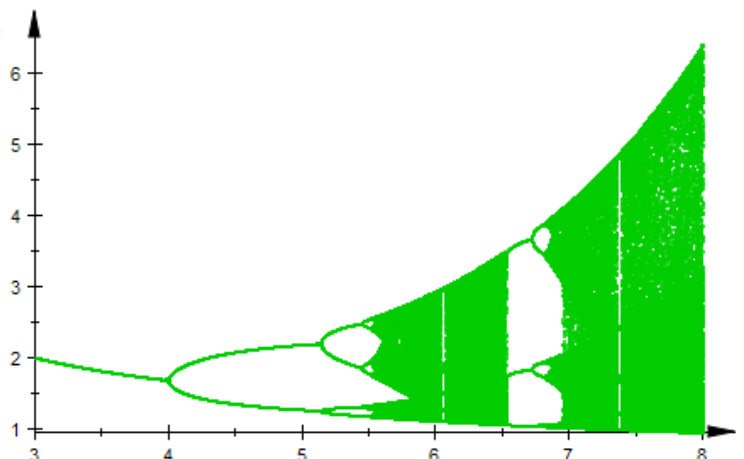
$g(x) = \frac{1}{k} \left((k-1)x + \frac{r}{x^{k-1}} \right)$. Nebenstehend

sind für $r = 8$ und $k = 3$ Folgenwerte dargestellt. Diese Trägerfunktion stammt aus dem

Newtonverfahren für die Nullstelle der Funktion p mit $p(x) = x^k - r$. Damit muss die Konvergenz hier superschnell sein. Zeigen Sie an der zweiten Liste, woran man das sehen kann. Weitere Beweise hierzu sind nicht verlangt.

- 7) Vergleichen Sie die Konvergenzgeschwindigkeiten beider Verfahren und bestimmen Sie für die h -Formel aus 5) die Steigung im Fixpunkt in Abhängigkeit von k . Für welche k liegt Konvergenz vor?

- 8) Erklären Sie, wie das Feigenbaumdiagramm zur h -Formel aus 5) zustande kommt. Deuten Sie 5) und 7) an dem Diagramm. Warum gibt es für die g -Formel aus 6) kein Feigenbaumdiagramm?



7.0

3.58163265306122448979591836735
 2.10263197737760212322686885161
 1.9560761333311168685878244326
 2.02345247882814541441237794675
 1.98867991823198873538554176856
 2.00575687954076448376347718227
 1.99714632142193374304952132657
 2.00143295854030194681755703764
 1.99928505928760199910618747354
 2.00035785389416484102051485455

7.0

4.72108843537414965986394557823
 3.26703450968485736888193752477
 2.42786261362595455335495921731
 2.07097291007491623271454805873
 2.00240447970591166379611071954
 2.00000288613443049030073112263
 2.0000000000041648779618313663
 2.0000000000000000000000086731
 2.0
 2.0