Staatsex Aug 07

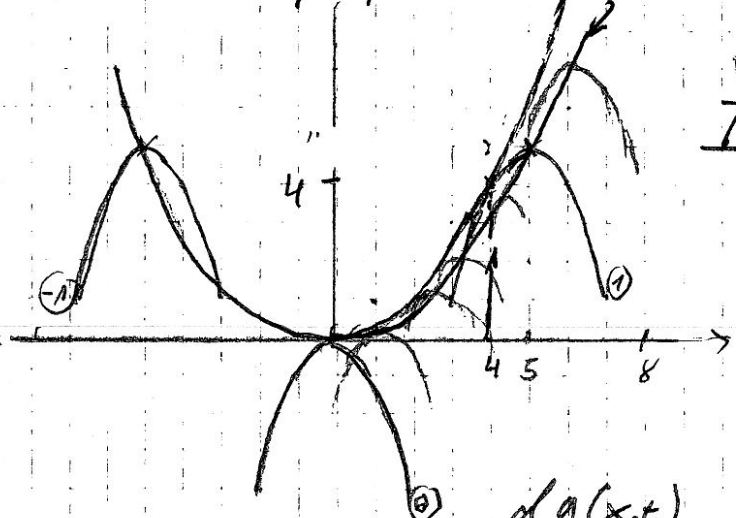
(2) Analysis, Hüllkurven $g(x,t) = -(x-5t)^2 + 5t^2$

a) sofort: nach unten geöffnete Parabel, Form der Normal-P.
Scheitel bei $S_t = (\underbrace{5t}, \underbrace{5t^2})$

Abszisse pos $\Leftrightarrow$ t pos. Ordinate stets positiv für pos u. neg t gleich

Es reicht $t \geq 0$ zu betrachten, Schar achsensymm. zur y-Achse

$x = x(t) = 5t$
$y = y(t) = 5t^2$ || ist eine Parameterdarstellung der Kurve der Scheitelpunkte



b) Bestimmung der Hüllkurve

I An einer festen Stelle x wird betrachtet, für welches t die Schar an dieser Stelle den höchsten Wert hat.
In $g(x,t)$ muss also nach t abgeleitet werden und der höchste Wert wird zugeh. t als Maximum und Max-Stelle bestimmt werden

Kurve d. Extr.
$y = 5\left(\frac{x}{5}\right)^2 = \frac{1}{5}x^2$

Also
$h(x) = \frac{1}{4}x^2$

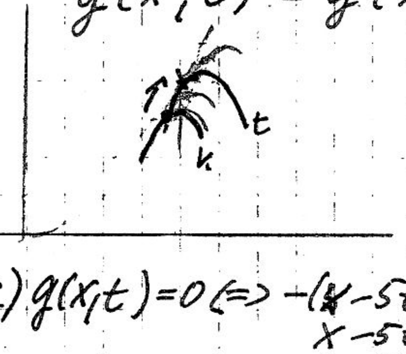
$$\frac{dg(x,t)}{dt} = -2(x-5t)\cdot(-5) + 10t = 10x - 50t + 10t = 10x - 40t$$

$10x - 40t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{4}x$

Extremaler Wert an der Stelle x

$$h(x) := g(x, \tfrac{1}{4}x) = -(x - 5\cdot\tfrac{1}{4}x)^2 + 5(\tfrac{1}{4}x)^2 = -(-\tfrac{1}{4})^2x^2 + \tfrac{5}{16}x^2 = -\tfrac{1}{16}x^2 + \tfrac{5}{16}x^2 = \tfrac{1}{4}x^2$$

II Wenn eine der Scharparabeln mit einer anderen geschnitten wird, liegt der Schnittpkt i.a. nicht auf der Hüllkurve. Lässt man aber die eine an die andere infinitesimal heranrücken, so erhält man Punkte der Hüllkurve.



$$g(x,t) = g(x,k) \Leftrightarrow -(x-5t)^2 + 5t^2 = -(x-5k)^2 + 5k^2$$
$$\Leftrightarrow -x^2 + 10xt - 25t^2 + 5t^2 = -x^2 + 10xk - 25k^2 + 5k^2$$
$$\Leftrightarrow 10x(t-k) - 20(t^2-k^2) = 0$$
$$\Leftrightarrow (10x - 20(t+k))(t-k) = 0 \quad t=k \text{ triv.}$$

Betrachte $\lim_{k \to t}(10x - 20(t+k)) = 10x - 40t = 0$
$\Rightarrow t = \frac{1}{4}x$
$\Rightarrow h(x) = \dots$ wie oben $= \frac{1}{4}x^2$

c) $g(x,t) = 0 \Leftrightarrow -(x-5t)^2 = 5t^2$
$x - 5t = \pm\sqrt{5}\,t$
$x = 5t \pm \sqrt{5}\,t$
$x = (5 \pm \sqrt{5})t$

Integral $J = \int_{x_1}^{x_2} g(x,t)\,dx = \left[-\frac{1}{3}(x-5t)^3 + 5t^2x\right]_{5t-\sqrt{5}t}^{5t+\sqrt{5}t} \underset{TI}{=} \frac{20}{3}\sqrt{5}\,t^3$

d) ||| = Integral über die Differenz

$$= \int_{x_1}^{x_2}\left(\tfrac{1}{4}x^2 - g(x,t)\right)dx = \int_{x_1}^{x_2}\tfrac{1}{4}x^2\,dx - J = J^* - J = \tfrac{40}{3}\sqrt{5}\,t^3 - \tfrac{20}{3}\sqrt{5}\,t^3 = \underline{\underline{\tfrac{20}{3}\sqrt{5}\,t^3}}$$

$J^* = \left[\frac{1}{12}x^3\right]_{x_1}^{x_2} \underset{TI}{=} \frac{40}{3}\sqrt{5}\,t^3$ Zwischen Hüllkurve und einer der Parabeln

entsteht zwischen den Nst. der Parabel dieselbe Fl. wie [illegible]

e) $t \in \mathbb{Q} \Rightarrow x_1 = (5+\sqrt{5})t \notin \mathbb{Q}$ da $\mathbb{Q}[\sqrt{5}] \neq \mathbb{Q}$
$t = 5-\sqrt{5} \Rightarrow x_1 = (5+\sqrt{5})(5-\sqrt{5}) = 25-5 = 20 \in \mathbb{Q}$