(1) Aufgabe 1

a)
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad a^T = (-48 \;\; 54 \;\; -18)$$

$$d = 273$$

Vektorgleichung:

$$p^T \cdot A \cdot p + a^T \cdot p + d = 0$$

$$(x\; y\; z) \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + (-48 \;\; 54 \;\; -18) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 273 = 0$$

b) Eigenwerte

$$A \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}$$

$$(A - \lambda E) \cdot \vec{v} = 0$$

Diese Gleichung hat nur eine nicht-triviale Lösung, wenn die Determinante $\det(A - \lambda E) = 0$ ist.

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$-\lambda^3 + (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2 - (A_{11} + A_{22} + A_{33})\lambda + \det(A) = 0$$

Nebenrechnung: $a_{11} + a_{22} + a_{33} = 2 + 5 + 2 = 9$

$A_{11} = 10 - 1 = 9 \qquad \det(A) = 0$

$A_{22} = 4 - 4 = 0$

$A_{33} = 10 - 1 = 9$

$$-\lambda^3 + 9\lambda^2 - 18\lambda + 0 = 0 \quad | : (-\lambda) \rightarrow \lambda_1 = 0$$

$$\lambda^2 - 9\lambda + 18 = 0$$

$$\lambda_{2,3} = 4{,}5 \pm \sqrt{20{,}25 - 18}$$

$$= 4{,}5 \pm 1{,}5 \qquad \rightarrow \lambda_2 = 3 \;,\; \lambda_3 = 6$$

Die Eigenwerte sind die Vorfaktoren der quadratischen Glieder. $\lambda_1 = 0$, d.h. es gibt im Endterm kein x^2, sondern nur ein lineares x.

$\rightarrow$

~~Eigen~~

f_2

c) ~~b)~~ Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 0$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{v} = \vec{0}$$

① $2x - y + 2z = 0$

② $-x + 5y - z = 0$

③ $2x - 1y + 2z = 0$

Da zwei Gleichungen (① und ③) linear voneinander abhängig sind, darf eine Variable frei gewählt werden

gewählt: $z = 1$

② $-x + 5y - 1 = 0$

$x = 5y - 1$

in ① $10y - 2 - y + 2 = 0$

$9y = 0$

$y = 0$

$\rightarrow x = 5 \cdot 0 - 1 = -1$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Eigenvektor $\vec{ev_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Normierung: $|\vec{ev_1}| = \sqrt{1+0+1} = \sqrt{2}$

$\vec{ev_{1n}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

weitere Eigenvektoren per TT:

$\vec{ev_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad \vec{ev_{2n}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{ev_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad \vec{ev_{3n}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Afg Blatt mit

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

~~Fran~~ Aus den normierten Eigenvektoren wird die Orthonormalmatrix P gebildet. Die transponierte Matrix P^T ist die Transformationsmatrix, die die Quadrik in die Lage bringt, so dass die Hauptachsen der Quadrik parallel zu den Koordinatenachsen liegen.

$$P^T = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} ; \quad P = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

Die Determinante $\det(P^T) = -1$, d.h. es liegt neben der Drehung eine Spiegelung vor. Um diese rückgängig zu machen, sollten bei einem Eigenvektor die Vorzeichen getauscht werden. (hier nicht weiter gemacht.) Dadurch passen Punkt t später nicht zusammen

Kennzeichnung *

e) $a^T \cdot P$ liefert die Vorfaktoren* der linearen Glieder → eine per-Hand-Rechnung siehe Seite 3 Rückseite!!

$$a^T \cdot P \overset{TI}{=} (15\sqrt{2} \quad -4\sqrt{3} \quad -29\sqrt{6})$$

$$p^T \cdot \underbrace{P^T \cdot A \cdot P}_{} \cdot p + a^T \cdot P \cdot p + d = 0$$

Diagonalisierung: $P^T \cdot A \cdot P$ liefert Eigenwerte als Vorfaktoren der quadratischen Glieder

$$3y^2 + 6z^2 + 15\sqrt{2}x - 4\sqrt{3}y + 29\sqrt{6}z + 273 = 0$$

f) $$3y^2 - 4\sqrt{3}y + 6z^2 + 29\sqrt{6}z + 15\sqrt{2}x + 273 = 0$$

Nebenrechnung $\left[3\left(y^2 - \frac{4\sqrt{3}}{3}y + \frac{4}{3}\right) + 6\left(z^2 + \frac{29\sqrt{6}}{6}z + \frac{841}{24}\right)\right]$

$$3\left(y - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 - 4 + 6\left(z + \frac{29\sqrt{6}}{12}\right)^2 - \frac{841}{4} + 15\sqrt{2}x + 273 = 0$$

$$3\left(y - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 6\left(z + \frac{29\sqrt{6}}{12}\right)^2 + 15\sqrt{2}x + \frac{235}{4} = 0$$

→

Verschiebung in x - Richtung

$$15\sqrt{2}\left(x+\frac{47\sqrt{2}}{24}\right) = 15\sqrt{2}\,x+\frac{235}{4}$$

Verschiebungsvektor $\vec{t} = \begin{pmatrix} \frac{47\sqrt{2}}{24} \\ -\frac{2\sqrt{3}}{3} \\ \frac{29\sqrt{6}}{12} \end{pmatrix}$ * das ist das richtige t

Quadrikgleichung in Ursprungslage (Hauptform)

$$3y^2+6z^2+15\sqrt{2}\,x = 0$$

$$15\sqrt{2}\,x = -3y^2-6z^2$$

$$x = -\frac{3y^2}{\sqrt{2}\cdot 15} - \frac{6z^2}{\sqrt{2}\cdot 15}$$

$$x = -\frac{y^2}{5\sqrt{2}} - \frac{2z^2}{5\sqrt{2}}$$ ✓

Bei der Quadrik handelt es sich um ein elliptisches Paraboloid. Erkennbar ist dies am fehlenden x^2-Glied. Würden alle drei quadratischen Glieder (x^2, y^2, z^2) vorliegen, wäre die Quadrik ein Ellipsoid und im Bild nur ein Ausschnitt dargestellt. Das ist hier nicht der Fall. An den beiden negativen Vorzeichen in der Hauptform ist zu erkennen, dass das elliptische Paraboloid nach links geöffnet ist, wie im Bild dargestellt.

g) Scheitel im Ursprung $m'' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Scheitel vor Verschiebung in den Ursprung:

$$m' = -\vec{t} = \begin{pmatrix} -\frac{47\sqrt{2}}{24} \\ \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{29\sqrt{6}}{12} \end{pmatrix}$$

Fehler übertragen von oben, später nicht verwendet

③

Scheitel in Ausgangslage:

$$m'' = P\cdot(-\vec{t})$$

$$\overset{TI}{=} \begin{pmatrix} 5/24 \\ 11/2 \\ -89/24 \end{pmatrix} \quad (r) \quad * \text{ eigentlich } \begin{pmatrix} \frac{121}{24} \\ -\frac{25}{6} \\ \frac{9}{8} \end{pmatrix}$$

h) R auf geg. Quadrik? → Prüfung übers Einsetzungsverfahren

$$2\cdot 4^2 + 5\cdot(-5)^2 + 2\cdot(-2)^2 - 2\cdot 4(-5) + 4(4)\cdot(-2) - 2(-5)(-2)$$

$$-48\cdot 4 + 54\cdot(-5) - 18(-2) + 273 = 0$$

$$32 + 125 + 8 + 40 - 32 - 20 - 192 - 270 + 36 + 273 = 0$$

$$-273 + 273 = 0$$

$$0 = 0$$

→ R liegt auf Quadrik in ~~Ursprungs~~ Ausgangslage oder ursprünglicher

$$R_{gedreht} = P^T \cdot R$$

$$\overset{TI}{=} P^T \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\cdot\sqrt{2} \\ -\sqrt{3} \\ 2\cdot\sqrt{6} \end{pmatrix} (r) \quad -2\sqrt{6}$$

$$R_{gedreht\ u.\ verschoben} = R_{in\ Ursprungslage} = R_{gedreht} + \vec{t}$$

$$\overset{TI}{=} \begin{pmatrix} -3\sqrt{2} \\ -\sqrt{3} \\ 2\sqrt{6} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{47\sqrt{2}}{24} \\ -\frac{2\sqrt{3}}{3} \\ \frac{29\sqrt{6}}{12} \end{pmatrix} * = \begin{pmatrix} -\frac{25\sqrt{2}}{24} \\ -\frac{5\cdot\sqrt{3}}{3} \\ \cancel{\frac{53\cdot\sqrt{6}}{12}} \end{pmatrix} \quad \frac{5}{12}\sqrt{6}$$

* ebenso, dieses t passt nicht zu Ihrem P

i) Die Matrix A kann diagonalisiert werden, da es sich um eine symmetrische Matrix handelt.* Hier sind alle Eigenwerte reell. Die Eigen~~we~~vektoren sind linar unabhängig. ~~von~~ Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal zueinander.

* Bei dieser sind alle spiegelbildlich zur Hauptdiagonale stehenden Elemente paarweise gleich

weiter S. ⑧

d) Die Eigenvektoren sollten als Rechtssystem gewählt werden, da ~~die~~ sie dann senkrecht aufeinander stehen. Die Eigenvektoren sind orthonormal zueinander, d.h. sie sind zur Länge 1 normiert und stehen senkrecht aufeinander.
In einem Rechtssystem vollzieht sich die Hauptachsentransformation von alleine durch Drehung und Verschiebung. Es ist dann keine Spiegelung mehr dabei.

zu e) ein linearer Term per Hand

$a^T \cdot P =$

$$(-48 \quad 54 \quad -18) \cdot \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{2}}{2} & \\ 0 & \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \dots \end{pmatrix}$$

$$= -48 \cdot \frac{-\sqrt{2}}{2} + 54 \cdot 0 - 18 \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= 24\sqrt{2} - 9\sqrt{2} = 15\sqrt{2}$$

8

zu 1 i) Die Diagonalisierung ergibt sich aus $P^T \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$

$P^T \cdot P$ ergibt die Matrix

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$