Staatsex Aug 07

① Analytische Geometrie $2x^2+5y^2+2z^2-2xy+4xz-2yz$

a) Vektorgleichung $p^T A p + a^T p + d = 0$ $\quad -48x+54y-18z+273=0$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad a^T = (-48, 54, -18)$$

b) Eigenwerte $\lambda_i$ und Eigenvektoren $v$:

Vektoren, die $Av = \lambda v$ erfüllen sind gesucht

$\Leftrightarrow Av - \lambda v = 0 \Leftrightarrow (A - \lambda E)v = 0$ lineares GLS

homogen, damit eine nichttriviale Lösung möglich ist muss gelten $\det(A-\lambda E)=0$, das heißt also

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(5-\lambda)(2-\lambda)+2+2-4(5-\lambda)$$
$$-2(2-\lambda)-(2-\lambda)$$

$= -\lambda(\lambda^2 - 9\lambda + 18) = 0$ Alternativ mit Formel $\Sigma a_{ii}$, $A_{ii}$

$\Leftrightarrow \lambda = 0 \vee (\dots) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \vee \lambda = 3 \vee \lambda = 6$

c) Eigenvektor zu $\lambda_1 = 0$ GLS
$$\left.\begin{array}{l} 2x - y + 2z = 0 \\ -x + 5y - z = 0 \\ -2x + 10y - 2z = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = 0 \\ x = -z \end{array} \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

zu $\lambda_2 = 3$
$$\left.\begin{array}{l} -x - y + 2z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \\ \quad -3y + 3z = 0 \\ \quad y = z \end{array}\right\} x = z \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{ebenso } v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
zu $\lambda_3 = 6$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \qquad \text{Abbildung } p' = P^T p$$

d) Das Kreuzprodukt erzeugt ein Rechtssystem $v_1 \times v_2 =$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+1 \\ -1-1 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = v_3$$ also Rechtssystem der EV.

alternativ $|P| = 1+2+0+1+2-0 = 6 > 0$

$1 \quad 1$
$0 \quad 1$

Bilden die EV ein Rechtssystem, ist die Transformation sicher eine Drehung.
Eine Spiegelung ist dann unmöglich.
Eine andere Orientierung als in der Zeichnung würde die Quadrik in eine zu einer anderen Achse parallele Stellung bringen oder die Öffnung würde zur pos x-Achse zeigen.

e) $p' = P^T p \Leftrightarrow p = P p' \Leftrightarrow p^T = p'^T P^T$ zusammen

$$p^T A p + a^T p + d = 0 \Leftrightarrow p'^T \underbrace{P^T A P}_{D_\lambda} p' + a^T P p' + d = 0$$

Diagonalisierung

① Fortsetzung

$D_\lambda = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&3&0\\0&0&6\end{pmatrix}$ $\quad a^T P = (-48, 54, -18)\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \cdots & \cdots\\ 0 & \cdots & \cdots\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \cdots & \cdots\end{pmatrix} = \left(\frac{-48+0+18}{\sqrt{2}}, \dots, \dots\right)$

Vorz. anders als gegeben,
Orientierungsfrage.
Es wird im Folgenden das Geg. verwendet.

$= \left(-\frac{30}{\sqrt{2}}, \dots, \dots\right) = (-15\sqrt{2}, \dots, \dots)$

f) $3y^2 + 6z^2 + 15\sqrt{2}x - 4\sqrt{3}y + 29\sqrt{6}z + 273 = 0$

$15\sqrt{2}x + 3\left(y^2 - \frac{4}{3}\sqrt{3}y + \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)^2\right) - 4 + 6\left(z^2 + \frac{29}{6}\sqrt{6}z + \left(\frac{29}{12}\sqrt{6}\right)^2\right) - \frac{29^2}{4} + 273 = 0$

$3\left(y - \frac{2}{3}\sqrt{3}\right)^2 + 6\left(z + \frac{29}{12}\sqrt{6}\right)^2 + 15\sqrt{2}x + \frac{235}{4} = 0 \Rightarrow t =$ siehe unten *

positiv und verschieden ⇒ Schnitte ⊥ x-Achse sind Ellipsen.

Kein quadratischer Term in x ⇒ alle Ebenen, die die x-Achse enthalten, schneiden Parabeln aus der Quadrik. Parabeln sind offen, daher reicht das Fenster aus. Es handelt sich eben nicht um ein Ellipsoid, sondern um ein elliptisches Paraboloid.

g) Urbild des Scheitels.

$\boxed{* \text{ Verschiebung in } x\text{-Richtung} \quad 15\sqrt{2}x + \frac{235}{4} = 15\sqrt{2}\left(x + \frac{47\sqrt{2}}{24}\right)}$

Der Scheitel wird auf $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ abgebildet, vor der Verschiebung liegt er bei $-t$, vor der Drehung bei $m = P(-t) = \begin{pmatrix}\frac{127}{24}\\ -\frac{23}{6}\\ \frac{9}{8}\end{pmatrix}$

$t = \begin{pmatrix}\frac{47\sqrt{2}}{24}\\ -\frac{2\sqrt{3}}{3}\\ \frac{29\sqrt{6}}{12}\end{pmatrix}$

h) $R(4, -5, -2)$ $\quad 2\cdot 4^2 + 5\cdot 5^2 + 2\cdot 2^2 + 2\cdot 4\cdot 5 - 4\cdot 4\cdot 2 - 2\cdot 5\cdot 2 - 48\cdot 4 + 54\cdot(-5) - 18\cdot(-2) + 273 =$

$\cancel{32} + 125 + 8 + 40 - \cancel{32} - 20 - 192 - 270 + 36 + 273 = 0$

R gedreht $r' = P^T r = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\-5\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{16}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$

R' verschoben

$r'' = \begin{pmatrix}\frac{35}{24}\sqrt{2}\\ -\frac{1}{3}\sqrt{3}\\ \frac{61}{12}\sqrt{6}\end{pmatrix} = r' + t$

i) Durch die Wahl einer symmetrischen Matrix A sichert man reelle Eigenvektoren und die Diagonalisierung

$P^T A P = D_\lambda$ ab.