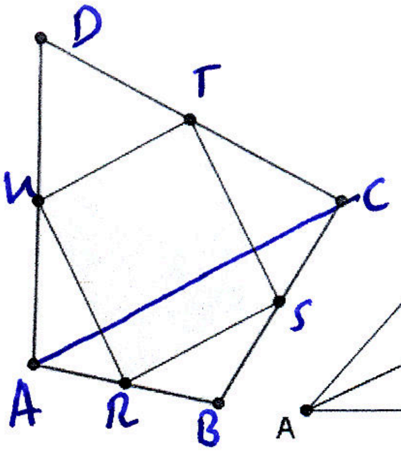
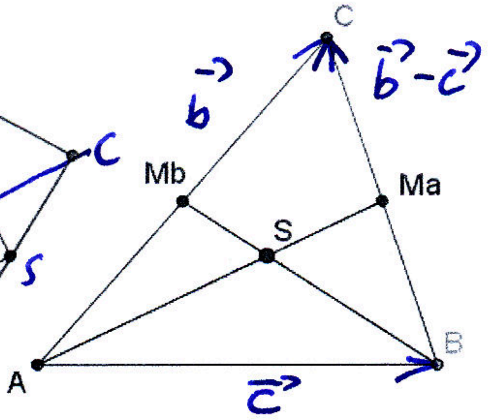
Leuphana Universität Lüneburg Mathematik: NAME:
Lehramt Berufsbildende Schulen/ BA Modul 3b Fachwiss. Schein /Note
Lehramt Grund- Haupt- und Realschulen Fachwissenschaftlicher Schein

Lineare Algebra

Prof. Dr. Dörte Haftendorn 10. Juli 2007

Aufgabe 1 Seitenhalbierende und Mittenfigur





a) Bestimmen Sie vektoriell das Teilungsverhältnis der Seitenhalbierenden.

b) Welcher Satz der Elementargeometrie ist damit bewiesen?

c) Welche besondere Gestalt hat die Mittenfigur eines beliebigen Vierecks? Zeigen Sie das Vermutete vektoriell und auch elementargeometrisch.

a) $\vec{AS} = t\left(\vec{c} + \frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{c})\right) = t\left(\frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b}\right)$

$\vec{AS} = \vec{c} + r\left(\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c}\right) = (1-r)\vec{c} + \frac{1}{2}r\vec{b}$

Also $\frac{1}{2}t\vec{c} + \frac{1}{2}t\vec{b} = (1-r)\vec{c} + \frac{1}{2}r\vec{b}$

$\left(\frac{1}{2}t - 1 + r\right)\vec{c} = \left(\frac{1}{2}r - \frac{1}{2}t\right)\vec{b}$

Da $\vec{c}$ und $\vec{b}$ linear unabhängig sind, müssen die Faktoren Null sein

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2}t + r - 1 &= 0 \\ -\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}r &= 0 \Rightarrow t = r \end{aligned}\right\} \quad \frac{3}{2}t = 1, \quad \underline{\underline{t = \frac{2}{3}}}, \ \underline{\underline{r = \frac{2}{3}}}$$

S teilt die Seitenhalbierenden im Verhältnis 1:2

b) Da das nun für alle Seitenhalbierenden gilt ist S der Schwerpunkt, der Schwerpunktsatz ist bewiesen.

c) "Das Mittenviereck ist ein Parallelogramm."

Elementar: $\overline{RS}$ ist $\parallel \overline{AC}$ und halb so lang wie $\overline{AC}$ da R und S Mitten sind, folgt das aus dem Strahlensatz. Das gilt auch für UT $\Rightarrow$ RSTU ist Parallelogramm

Vektoriell $\vec{RS} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{BC}$

$= \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{BC}) = \frac{1}{2}\vec{AC} \overset{\text{Symmetr. Argument}}{=} \vec{UT} \Rightarrow$ Beh.

$E_1: \quad x+y+z=3$

$E_2: \quad -2x-y+2z=5$

Aufgabe 2 Ebenen

a) Bestimmen Sie die Schnittgerade der Ebenen.
b) Geben Sie zu E_2 eine parallele andere Ebene an.
Was können Sie über deren Schnitt mit E_1 sagen?
c) Unter welchem Winkel schneiden sich die beiden Ebenen?
d) Erzeugen Sie zu E_1 eine Ebenengleichung in Parameterdarstellung.

---

a) $E_1: \quad x+y+z=3 \quad \longrightarrow \quad y=-x-z+3$

$E_2: \quad -2x-y+2z=5$

$\oplus$

$-x \quad +3z=8$

$x = 3z-8$

$y = -3z+8-z+3$

$y = -4z+11$

Gerade $g: \quad \vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Schnittgerade

b) $E_3: \quad -2x-y+2z=10$ gleicher Normalenvektor, anderer Abstand vom Ursprung

Probe $E_2: -2x-y+2z=5$

$\ominus \quad 0+0+0=15$ Wid., wirklich getrennt liegend.

Da E_1 und E_2 g als Schnittgerade haben und E_3 parallel zu E_2 ist, haben E_3 und E_1 eine zu g parallele Gerade als Schnittgerade.

c) Der Schnittwinkel von E_1 und E_2 ist der Winkel, den die Normalen bilden, α mit:

$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = |\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2| \cdot \cos\alpha$

$|n_1| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3} \quad |n_2| = \sqrt{4+1+4} = 3$

$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 1\cdot(-2)+1\cdot(-1)+1\cdot 2 = -1 = \sqrt{3}\cdot 3\cdot\cos\alpha$

$\cos\alpha = -\frac{1}{3\sqrt{3}} = -\frac{1}{9}\sqrt{3} = 0{,}19245\ldots \Rightarrow \alpha = 101^\circ = 1{,}764\ldots$ RAD Schnittwinkel

(richtig ist auch 79° bei entgegengesetztem $\vec{n}_i$)

d) Punkte auf E_1 $\quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ermittelt $1+1+1=3$

weiter die gesamte Gerade g, ein Richtungsvektor ist klar, der von g. Der andere

$\vec{v}_2 = \vec{a} - \begin{pmatrix} -8 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -8 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -10 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow E: \vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 9 \\ -10 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Parameterdarstellung

Aufgabe 3 Affine Abbildung, Eigenvektoren

$$A = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 11 & 3 \\ 3 & 19 \end{pmatrix}$$

a) Mit A ist eine affine Abbildung definiert. Zeichnen Sie die Bilder der Koordinatenvektoren ein.

b) Bestimmen Sie von Hand erläutert die Eigenwerte und Eigenvektoren und zeichnen Sie die Eigenvektoren ein.

c) Zeichnen die Bildfigur ein. Verwenden Sie dazu a), b) und Ihre Kenntnisse der Eigenschaften affiner Abbildungen.

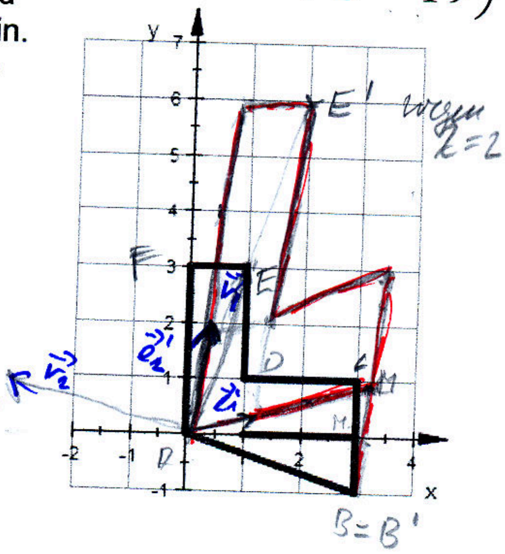
d) Verfassen Sie eine Stichpunktliste für Schüler: "Wie komme ich zur Bildfigur". Berücksichtigen Sie dabei Eigenwerte und Eigenvektoren.

e) Zeichnen Sie die Urbildfigur vergrößert auf kariertem Papier ab. Scheren Sie sie an der y-Achse in den 1. Quadranten hinein um 45°.

f) Stellen Sie die Abbildungsmatrix S für diese Scherung auf.

g) Bestimmen Sie die Abbildungsgleichung für die Hintereinanderausführung der Abbildung zu A mit dieser Scherung? (Matrix bestimmen, TI möglich)

h) Zeigen Sie auf irgendeine Weise, dass es nicht egal ist, welche der Abbildungen zuerst ausgeführt wird.



---

a) $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\quad \vec{e}_1\,' = \begin{pmatrix}1{,}1\\0{,}3\end{pmatrix}$ $\quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ $\quad \vec{e}_2\,' = \begin{pmatrix}0{,}3\\1{,}9\end{pmatrix}$

b) Ansatz für Eigenwerte und Eigenvektoren

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \Rightarrow A\vec{v} - \lambda\vec{v} = 0 \Rightarrow (A-\lambda E)\vec{v} = \vec{0}$$

Dieses homogene Gl.S. hat nur dann eine nichttriviale Lösung, wenn

$$\det(A-\lambda E) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1{,}1-\lambda & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 1{,}9-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (1{,}1-\lambda)(1{,}9-\lambda) - 0{,}09 = 0$$

$$2{,}09 - 1{,}1\lambda - 1{,}9\lambda + \lambda^2 = 0{,}09$$

$\lambda^2 - 3\lambda = -2$

$$\lambda^2 - 3\lambda + \left(\tfrac{3}{2}\right)^2 = -2 + \tfrac{9}{4} = \tfrac{1}{4}$$

$$\lambda = \tfrac{3}{2} \pm \tfrac{1}{2} \Rightarrow \lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = 1$$

Eigenvektoren: eine Zeile reicht

$$(1{,}1-2)v_x + 0{,}3\,v_y = 0$$
$$-0{,}9\,v_x + 0{,}3\,v_y = 0$$
$$v_y = 3v_x$$

der andere EV muss darauf $\perp$ sein

$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$ $\qquad$ Setze $v_x = 1 \Rightarrow v_y = 3$ $\qquad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$

$\vec{OE} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = \vec{v}_1 \Rightarrow \vec{OE}\,' = 2\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}$

$\vec{OB} = \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} = -\vec{v}_2 \Rightarrow \vec{OB}\,' = -1\cdot\vec{v}_2 = \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ Fixpunkt

$\vec{OF} = 3\vec{e}_2 \Rightarrow \vec{OF}\,' = 3\vec{e}_2\,' = 3\begin{pmatrix}0{,}3\\1{,}9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0{,}9\\5{,}7\end{pmatrix}$

d) 1. Lies die Bilder der Einh.vektoren $\vec{e}_i$ aus der Matrix ab und zeichne sie ein.

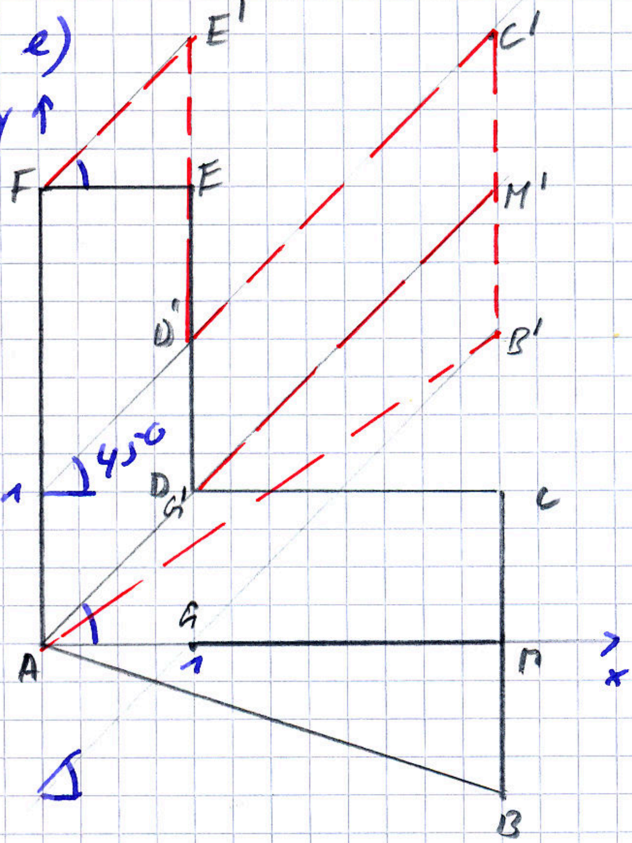
2.) Bilde Figurpunkte auf den Achse als Vielfaches der $\vec{e}_i{}'$ ab.

3.) Zeichne die Eigenvektoren $\vec{v}_i$ ein.

4.) Figurpunkte, die auf den Eigenrichtungen liegen, werden nur λ_i-fache vom Ursprung aus gestreckt.

5.) Oft kannst du nun mit: Parallelentreue und Teilverhältnistreue die Bildfigur zu Ende zeichnen.

e)



f) $S = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ Die y-Achse bleibt fest.

$\vec{p}\,' = (SA)\,\vec{p}$

$$SA = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}11 & 3\\ 3 & 19\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{10} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix}11 & 3\\ 14 & 22\end{pmatrix}$$

$$AS = \frac{1}{10}\begin{pmatrix}11 & 3\\ 3 & 19\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix}14 & 3\\ 22 & 19\end{pmatrix}$$

$\neq$

es sind verschiedene Gesamtabbildungen.

Lin Alg
10.7.07

① a) Aus. bis k.u. Lgls Lö Ant.
b) Schwerpkt.
c) Parallelogramm elementar vektoriell

② a) Schnittgerade
b) $E_3 \parallel E_2$
$E_3 \cap E_1$
c) Winkel
d) E_1 in Param.

③ a) $\vec{e}_1{}'$, $\vec{e}_2{}'$
b) Ansatz, pdg. $LÖ^2$ EV^3, $Einz.^2$
c) Bild
d) Liste
e) Scherung
f) S
g) SA $\vec{p}' = \vec{p}'$
h) AS ≠

1

Max	GH KN SH OS KG DD CMe AS SO VG BM ML MK SS JB TK CS JS NN HH CN BA BL
5	4 4 5 5 5 5 0 1 4 4 0 0 3 4 2 4 2 5 1 3 5 4 4
5	3 1 5 5 5 4 1 1 4 5 0 4 / 5 2 3 2 5 0 1 3 4 3
2	1 0 2 2 1 1 / 2 2 1 0 1 1 2 / 0 0 2 2 1 1 / /
2	2 0 2 2 2 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 2 / 2 1 /
4	/ / 4 3 / / / / / / / / / 1 / / / / / / /
4	4 / 4 / 4 / / / / / / / / / / / / / / 1 4 /
22	14 5 22 17 17 11 2 5 11 11 0 6 5 13 4 8 5 13 5 5 12 13 7
6	6 1 0 6 6 5 6 3 6 6 / 6 4 4 6 6 3 6 0 5 4 2 2
3	0 3 0 3 0 3 0 3 0 0 0 0 0 3 3 1 0 2 /
2	0 1 1 1 0 1 / 1 / / 1 1 / 1 0 / 1 0 /
6	5 6 6 6 4 6 6 6 6 0 0 3 6 6 6 5 6 5 0 0 /
5	4 / 5 3 / 3 2 4 5 0 0 / 5 0 4 / 4 4 0 5 /
22	15 1 10 18 19 9 15 15 16 21 0 6 8 16 12 20 8 19 10 6 11 2 2
2	2 1 2 2 2 2 0 2 2 2 / 0 0 2 1 2 2 1 / / 1 / 2
5	2 4 3 5 3 4 4 5 4 3 4 3 5 4 5 3 4 1 5 1 3 2
7	7 6 4 7 6 2 2 6 7 6 1 4 6 7 6 6 7 / 7 / 6 2
6	/ 5 4 5 6 5 5 2 5 1 / / / 2 4 0 6 1 0 0 /
5	/ 2 / 4 1 4 5 / 3 4 1 2 1 4 / 2 3 2 0 1 /
6	3 6 2 3 2 6 4 3 5 4 1 2 2 6 0 5 0 6 6 0 6 /
2	/ 1 2 2 1 0 1 1 2 2 1 1 2 1 0 0 1 2 2 /
3	/ 1 3 3 1 / 3 1 0 / 1 1 / 0 1 1 1 0 /
3	/ 3 2 3 / / 3 / 0 2 / / 0 0 2 / / /
39	14 26 23 33 25 23 25 19 27 26 8 12 19 27 1 22 13 29 15 15 11 9 7
83	43 42 55 68 61 43 42 39 54 58 7 24 32 56 17 50 26 61 30 26 34 24 16

GH SH OS DD AS
KN KG CMe VG
SO