

# Knotentheorie, Graphentheorie, Topologie

## Aufgabe 1 Knotentheorie

- Welche Händigkeit hat der keltische Knoten?
- Zeichnen Sie eine Reidemeister-Umformung des keltischen Knotens, bei der Sie gleich die inneren Kreuzungen beseitigen.
- Ist der keltische Knoten dreifärbbar?
- Man kann den keltischen Knoten als Summe von Kleeblattknoten auffassen. Allgemein bildet man eine Knotensumme, indem man aus jedem der beiden Knoten einen Strang auftrennt und die Enden mit denen des anderen Knotens verbindet. Begründen oder widerlegen Sie die folgenden Sätze:
  - Die Summe zweier dreifärbbarer Knoten ist ein dreifärbbarer Knoten.
  - Die Summe eines dreifärbbaren Knotens und eines nicht dreifärbbaren Knotens ist dreifärbbar.
  - Es gibt nicht dreifärbbare Knoten, deren Summe ebenfalls nicht dreifärbbar ist.



Keltischer Knoten

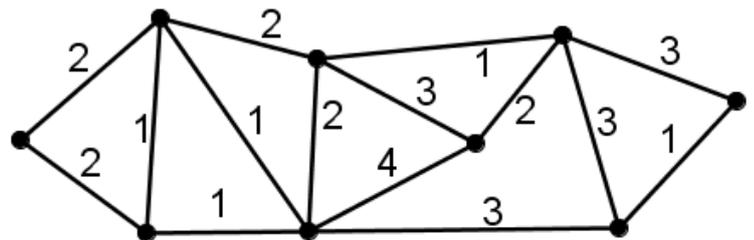
## Aufgabe 2 Zöpfe

- Zeichnen Sie für das übliche Flechten mit drei Strängen den Zopf nach den Regeln. Zeichnen Sie 6 Kreuzungen und nummerieren Sie sie. Stellen Sie das Zopfwort auf.
- Welche besondere Rolle spielt das Zopfwort aus a) in der Zopfgruppe?
- Nach jeder Kreuzung ergibt sich eine Permutation der Stränge. Wieviele verschiedene Permutationen treten hier auf, wieviele Permutationen kann es überhaupt geben?
- Nach welchen Kreuzungsnummern würde sich beim Schließen des Zopfes ein Knoten ergeben, bei welchen eine Verschlingung? Wie wäre es, wenn man immer weiter flechten würde?
- Entsteht bei 12 Kreuzungen beim Schließen ein zum geschlossenen a)-Zopf isomorphes Gebilde?

## Aufgabe 3

### Graphentheorie

- Gesucht ist ein minimaler Spannbaum. Zeichnen Sie ein und notieren Sie die Folge der ausgewählten Bewertungen.
- 



hat Konflikt mit	A	B	C	D	E
A					
B					
C					
D					
E					

Es geht hier um eine Einmündung mit fünf Verkehrsströmen. Füllen Sie die Adjazenzmatrix aus und erstellen Sie einen zugehörigen Konfliktgraphen. Führen Sie eine Knotenfärbung mit minimaler Farbenzahl durch. Was sagt die Knotenfärbung für die Ampeln an der

Einmündung aus?

Es folgt Seite 2

## Aufgabe 4 Graphentheorie Polyeder

- Zeichnen Sie die Draufsicht auf den Stumpf einer beliebigen 5-Ecks-Pyramide als planaren Graphen.
- Bestätigen Sie dafür den Eulerschen Polyedersatz.
- Welche Zusammenhänge mit  $n$  bestehen darüberhinaus bzgl.  $e, f$  und  $k$  bei  $n$ -Ecks-Pyramiden-Stümpfen?
- Wieviele Farben braucht man genau, um solche planaren Graphen zu färben? Färben Sie Ihren Graphen aus a) mit möglichst wenigen Farben.
- Welche Ecken-Grade können bei  $n$ -Ecks-Pyramidenstümpfen vorkommen und wie steht es damit bei den  $n$ -Ecks-Pyramiden selber?
- Gibt es  $n$ -Ecks-Pyramiden oder  $\sim$ -Stümpfe, deren Graphen eulersch sind?

## Aufgabe 5 Topologie

Bernhard Riemann, einer der größten Mathematiker, hat in Lüneburg 1846 Abitur gemacht.

Bei der "Riemannschen Zahlenkugel" wird jeder Punkt der Ebene mit dem Nordpol der Kugel verbunden. Der Durchstoßpunkt dieser Verbindungsgeraden mit der Kugel ist der Bildpunkt des Ebenenpunktes.

- Wieso wird dadurch die Ebene homöomorph auf die "punktierte Kugel" abgebildet? "Punktierte Kugel" sagt man, weil der Nordpol selbst nicht dazuzählt.
- Kann man den  $K_5$  auf der punktierten Riemannschen Kugel überschneidungsfrei zeichnen? (ein gutes Argument reicht!)
- Zeichnen Sie den vollständigen Graphen  $K_5$ . (Vollständiger Drudenfuß.)
- Wieviele Kanten muss man aus  $K_5$  mindestens entfernen, damit ein pättbarer Graph entsteht? Setzen dies in Beziehung zum Eulerschen Polyedersatz.
- Zeichnen Sie den entstehenden planaren Graphen.
- Zeichnen Sie den vollständigen  $K_5$  überschneidungsfrei auf einen Torus.
- Hier sehen Sie ein Möbiusband in der üblichen Darstellung. Zeichnen Sie Drittellinien ein und begründen Sie damit, was entsteht, wenn man das Band längs dieser Linien zerschneidet.

