Leuphana Universität Lüneburg Mathematik: NAME: Ha
Lehramt Berufsbildende Schulen/ MA Modul 11 a, LBS Fachwiss. Schein /Note
Lehramt Grund- Haupt- und Realschulen Fachwissenschaftlicher Schein

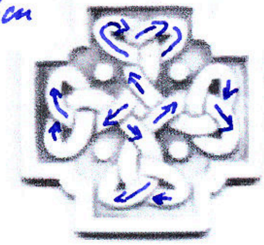
Knotentheorie, Graphentheorie, Topologie

Prof. Dr. Dörte Haftendorn | Seite 1 /2 | 1. Februar 2008

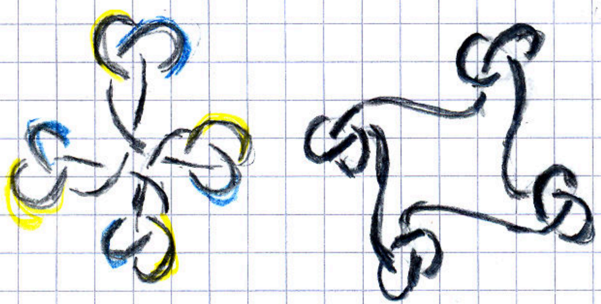
Aufgabe 1 Knotentheorie

Rechtshändig innen

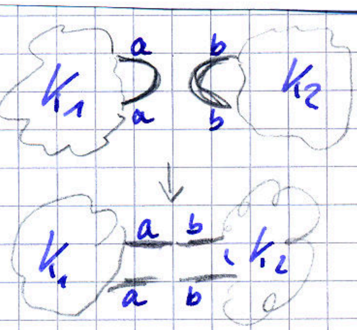
a) Welche Händigkeit hat der keltische Knoten? Links, alle außen
b) Zeichnen Sie eine Reidemeister-Umformung des keltischen Knotens, bei der Sie gleich die inneren Kreuzungen beseitigen.
c) Ist der keltische Knoten dreifärbbar? ja, innen eine Farbe
d) Man kann den keltischen Knoten als Summe von Kleeblattknoten auffassen. Allgemein bildet man eine Knotensumme, indem man aus jedem der beiden Knoten einen Strang auftrennt und die Enden mit denen des anderen Knotens verbindet. Begründen oder widerlegen Sie die folgenden Sätze:
   a. Die Summe zweier dreifärbbarer Knoten ist ein dreifärbbarer Knoten.
   b. Die Summe eines dreifärbbaren Knotens und eines nicht dreifärbbaren Knotens ist dreifärbbar.
   c. Es gibt nicht dreifärbbare Knoten, deren Summe ebenfalls nicht dreifärbbar ist.



Keltischer Knoten



d)a)

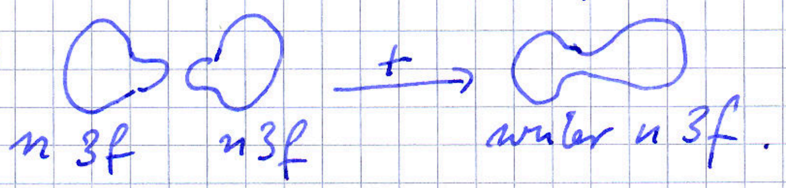


Fall I Farbe a = Farbe b ⇒ (a) (b) Kein Problem, wenn
" " "
beide Dreiff.b. waren

d)b) z.B. K_2 nicht 3-färbbar ⇒ K_1 verwendet 3 Farben
K_2 zwar nicht
nur wird weiter 3 Farben verwendet.

Fall II Farbe a ≠ Farbe b man färbt K_2 um
das ist kein Problem, da ja auch b ein Bogen war.

d)c)



d)c) ist eine richtige Aussage.

Aufgabe 2 Zöpfe

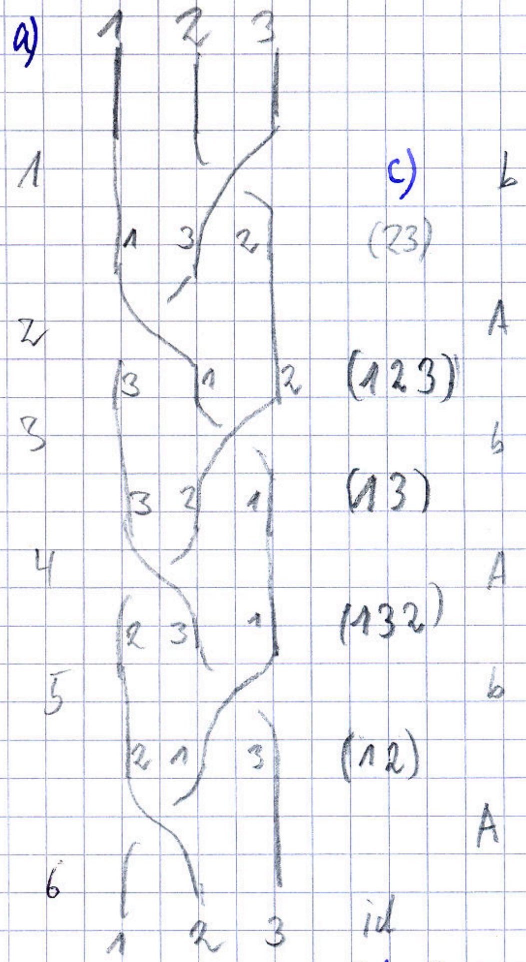
a) Zeichen Sie für das übliche Flechten mit drei Strängen den Zopf nach den Regeln. Zeichnen Sie 6 Kreuzungen und nummerieren Sie sie. Stellen Sie das Zopfwort auf.

b) Welche besondere Rolle spielt das Zopfwort aus a) in der Zopfgruppe?

c) Nach jeder Kreuzung ergibt sich eine Permutation der Stränge. Wieviele verschiedene Permutationen treten hier auf, wieviele Permutationen kann es überhaupt geben?

d) Nach welchen Kreuzungsnummern würde sich beim Schließen des Zopfes ein Knoten ergeben, bei welchen eine Verschlingung? Wie wäre es, wenn man immer weiter flechten würde?

e) Entsteht bei 12 Kreuzungen beim Schließen ein zum geschlossenen a)-Zopf isomorphes Gebilde?



3! = 6
Zahl der Permutationen.

Zopfwort bAbAbA $= (bA)^3$

b) in der Zopfgruppe ist das (id) ← als Permutation aufgefasst

c) $3! = 6$ Permutation, werden alle schon in den 6 Schritten erzeugt.

d) Zopf -> Knoten nach 2, 4, ~~6~~ ... alle geraden außer n·6 ←

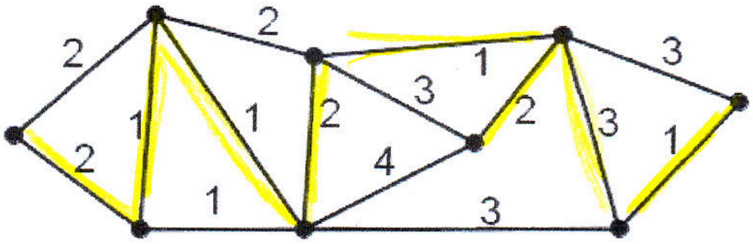
Zopf -> Verschlingung mit 2 Schl. nach 1, 3, 5, ... alle ungeraden

Verschlingung aus 3

e) Der geschlossene a 6-Zopf und der 12 Zopf sind beide Verschlingungen mit 3 Strängen.
Aber der 12-Zopf hat 6 unkämmbare Kreuzungen mehr.
Sie sind nicht isomorph.

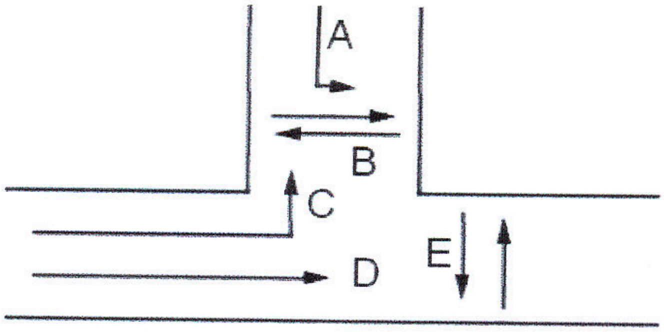
Aufgabe 3
Graphentheorie

a) Gesucht ist ein minimaler Spannbaum. Zeichen Sie ein und notieren Sie die Folge der ausgewählten Bewertungen.



1 1 1 1 2 2 2 3

b)

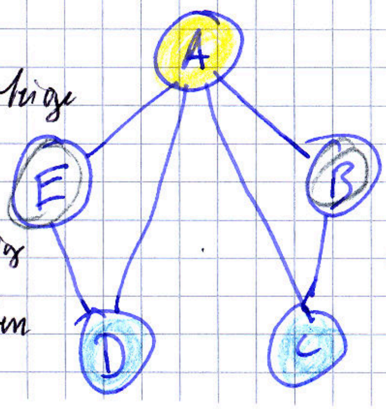


hat Konflikt mit	A	B	C	D	E
A		X	X	X	X
B	X		X		
C	X	X			
D	X				X
E	X			X	

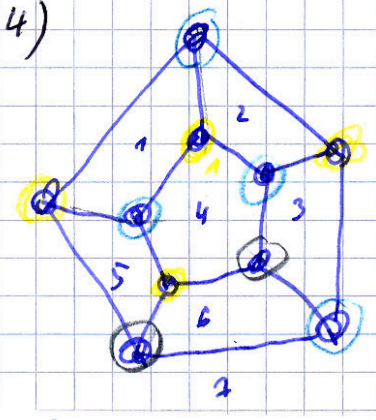
Es geht hier um eine Einmündung mit fünf Verkehrsströmen. Füllen Sie die Adjazenzmatrix aus und erstellen Sie einen zugehörigen Konfliktgraphen. Führen Sie eine Knotenfärbung mit minimaler Farbenzahl durch. Was sagt die Knotenfärbung für die Ampeln an der Einmündung aus?

3b)

Gleichfärbige können gleichzeitig grün haben



4)



$f = 7$

$e = 10$

$k = 5+5+5 = 3\cdot 5 = 15$

$e + f = k + 2$

$10 + 7 = 15 + 2$

$17 = 17$ wahre Aussage

Aufgabe 4 Graphentheorie Polyeder

a) Zeichen Sie die Draufsicht auf den Stumpf einer beliebigen 5-Ecks-Pyramide als planaren Graphen.
b) Bestätigen Sie dafür den Eulerschen Polyedersatz.
c) Welche Zusammenhänge mit n bestehen darüberhinaus bzgl. e,f und k bei n-Ecks-Pyramiden-Stümpfen?
d) Wieviele Farben braucht man genau, um solche planaren Graphen zu färben? Färben Sie Ihren Graphen aus a) mit möglichst wenigen Farben. alle Ecken Grad 3
e) Welche Ecken-Grade können bei n-Ecks-Pyramidenstümpfen vorkommen und wie steht es damit bei den n-Ecks-Pyramiden selber? alle Bodenecken Grad 3, Spitze Grad n
f) Gibt es n-Ecks-Pyramiden oder ~-Stümpfe, deren Graphen eulersch sind? ⇒ erst recht kein Eulerzug

mind. 3 Bodenecken, alle haben Grad 3 ⇒ kein Eulerzug

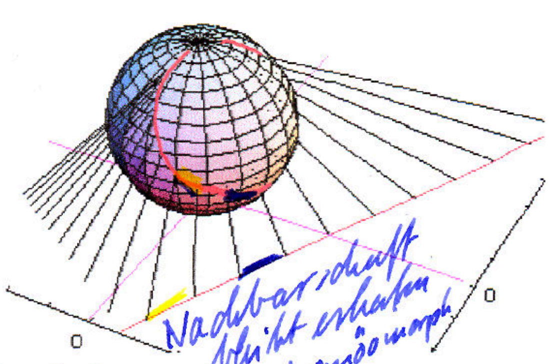
c) n-Eck Boden — 1 Boden — n Kanten Boden
n-Eck Deckel — 1 Deckel — n " Deckel
sonst nichts — n Seitenwände — n Kanten zw. Boden u. Deckel

$e = 2n$ $f = n + 2$ $k = 3n$

d) n gerade n Bodenecken abwechselnd färben (2 Farben)
n Deckel " " " andersherum

n ungerade so anfangen, eine 3. Farbe reicht dann auch für andere.

Aufgabe 5 Topologie



Bernhard Riemann, einer der größten Mathematiker, hat in Lüneburg 1846 Abitur gemacht.

Bei der “Riemannschen Zahlenkuge"l”wird jeder Punkt der Ebene mit dem Nordpol der Kugel verbunden. Der Durchstoßpunkt dieser Verbindungsgeraden mit der Kugel ist der Bildpunkt des Ebenenpunktes.

a) Wieso wird dadurch die Ebene homöomorph auf die “punktierte Kugel” abgebildet?
“Punktierte Kugel” sagt man, weil der Nordpol selbst nicht dazuzählt. Wie gut, kein Nachbarschaft würde zerrissen.

b) Kann man den K5 auf der punktierten Riemannschen Kugel überschneidungsfrei zeichnen? (ein gutes Argument reicht!) Nein, denn sie ist homöomorph zur Ebene, dort geht's ja auch nicht.

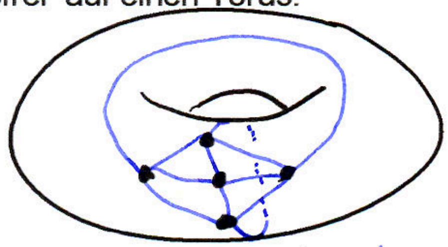
c) Zeichen Sie den vollständigen Graphen K5. (Vollständiger Drudenfuß.)

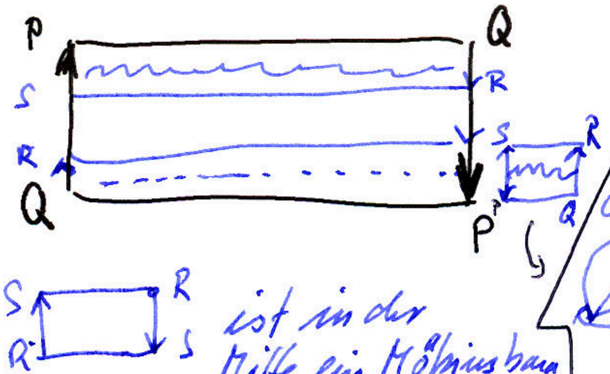
d) Wieviele Kanten muss man aus K5 mindestens entfernen, damit ein pättbarer Graph entsteht? Setzen dies in Beziehung zum Eulerschen Polyedersatz.

e) Zeichnen Sie den entstehenden planaren Graphen.

f) Zeichen Sie den vollständigen K5 überschneidungsfrei auf einen Torus.

g) Hier sehen Sie ein Möbiusband in der üblichen Darstellung. Zeichnen Sie Drittellinien ein und begründen Sie damit, was entsteht, wenn man das Band längs dieser Linien zerschneidet.

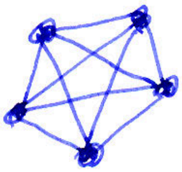




ist in der Mitte ein Möbiusband

außen wird ein verdrillter Zylinderring, doppelt so lang. abgeschnitten.

c)

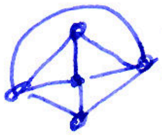


oder

← weg.

hier $k = 10$
$e = 5$

d) eine Kante entfernen



$f = 6$ } + 11
$e = 5$
$k = 9$ +2 11
$e + f = k + 2$