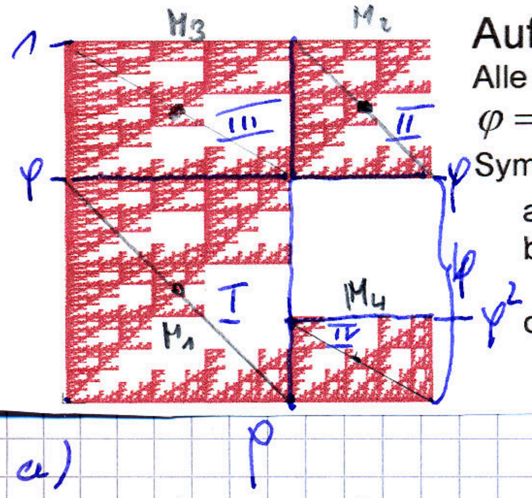
Leuphana Universität Lüneburg Mathematik: NAME:
Lehramt Berufsbildende Schulen/ MA Modul 11 b, LBS Fachwiss. Schein /Note
Lehramt Grund- Haupt- und Realschulen Fachwissenschaftlicher Schein

Fraktale Geometrie

Prof. Dr. Dörte Haftendorn

28. Jan 2008



Aufgabe 1 Goldfraktal

Alle Teilungen sind im goldenen Schnitt, nehmen Sie bitte $\varphi = 0{,}618$ als genäherte Dezimalzahl oder verwenden Sie das Symbol φ.

a) Stellen Sie damit alle vier Abbildungsgleichungen auf.
b) Finden Sie geometrisch das Bild des Mittelpunktes (0,5/0,5) in allen vier Abbildungen und rechnen Sie ein Bild auch aus.
c) Warum kann man hier die Selbstähnlichkeits-Dimension nicht bestimmen? Welcher Dimensionsbegriff eignet sich?

a)

I Zentrische Stauchung $p' = \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \varphi \end{pmatrix} p$

II " " und t $p' = \begin{pmatrix} 1-\varphi & 0 \\ 0 & 1-\varphi \end{pmatrix} p + \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi \end{pmatrix}$

III allg. Stauchung und t $p' = \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & 1-\varphi \end{pmatrix} p + \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix}$

IV " " " $p' = \begin{pmatrix} 0 & 1-\varphi \\ \varphi(1-\varphi) & 0 \end{pmatrix} p + \begin{pmatrix} \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$

Mit $1-\varphi = \varphi^2$

$\varphi(1-\varphi) = \varphi^3 = \varphi - \varphi^2 = \varphi - (1-\varphi) = 2\varphi - 1$
$= 1 - 2(1-\varphi)$

b) Eine Diagonale ist in den Rechtecken gut zu sehen, wenn man die andere noch einzeichnet, treffen sich beide im Mittelpkt. Affine Abb. erhalten Teilverhältnisse *

c) Alle Bausteine haben verschiedene Streckfaktoren in der Selbstähnlichkeitsdimension muss es ein Streckfaktor sein. Man [muss] die Boxdimension nehmen.

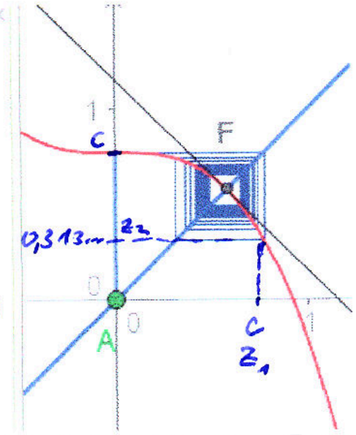
* I $\begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0{,}309 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

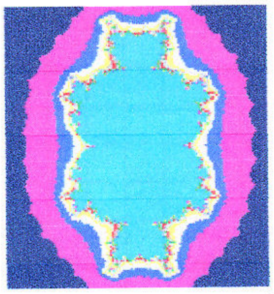
Aufgabe 2 Apfel-Teufelchen $f(z) = z^3 + c$

Ebenso wie das übliche Apfelmännchen ensteht das Apfel-Teufelchen als Mandelbrotmenge dieser Rekursion.

Freie Objekte
- $A = (0, 0)$
- $c = 0.77$
- $g(x) = x$
- $n = 36$

Abhängige Objekte
- $F = (0.58, 0.58)$
- $b: y = -1x + 1.16$
- $f(x) = -x^3 + 0.77$
- $x0 = 0$





a) Was bedeuten die Farben bei dem Bild vom Apfel-Teufelchen?

b) Berechnen Sie für $c=0.77\ i$ und $z_0=0$ die nächsten beiden Werte ausführlich und deuten Sie Ihre Ergebnisse an dem linken Bild. Was zeigt dieses linke Bild noch?

c) Warum ist bei f(x) links das Vorzeichen Minus und oben nicht?

d) Beim Apfel-Teufelchen ist die Reelle Achse die waagerechte Symmetrieachse. Begründen Sie, warum längs dieser Achse gar keine "Köpfchen" verhanden sind. Machen Sie dazu Skizzen mit der reellen Rekursion g(x)= x^3 +c

e) Zusatzfragen: Warum ist das Apfel-Teufelchen symmetrisch zu zwei Achsen? Warum ist in Richtung der Imaginären Achse genau ein Köpfchen?

a) $z_0 = 0 \quad z_{n+1} = f(z_n) = z_n^3 + c$

Je nach Wahl von c bleibt die Folge

1) hellblau: beschränkt, * c wird hellblau
   * nach k Schritten, k etwa 1000
2) dunkellila: schon nach 1 Schritt ist Divergenz sicher
3) rosa " 2 Schritten " " "
4) blau " 3 " " " .

⋮ 2)…

Die Farben visualisieren die Fluchtgeschwindigkeit.

b) $c = 0{,}77i \qquad z_1 = 0 + c = c = 0{,}77i$

c) $f(ai) = a^3 i^3 + 0{,}77i = (-a^3 + 0{,}77)i$

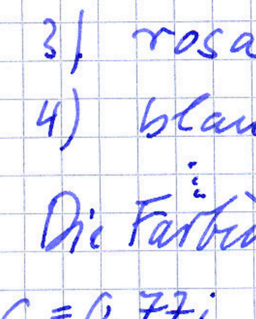
$z_2 = (0{,}77i)^3 + 0{,}77i = -0{,}77^3 i + 0{,}77i = 0{,}313467i$

Das Bild zeigt langsame Konvergenz gegen F

An der Steigung der einzigen Tangente, m=-1, sieht man das auch.

Wird c nun größer ⇒ keine Konvergenz, Bifurkation.
" " " kleiner ⇒ Konvergenz

d)

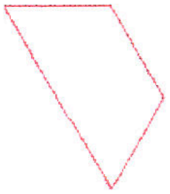


g ist für reelle c und $z_0 = 0$ Werte alle reell.
g ist längs der y-Achse verschobene Sattelpkte. Zwischen den Lagen grau und rot ergibt sich wieder Konvergenz, außerhalb sofort bestimmte Divergenz
"Köpfchen" entstehen aber bei Bifurkationen.

Pkt-Symm reell ≙ Symm ImAchse

Symm Re-Achse Entspr. d. Bild, symm.

Aufgabe 3 Trapezfraktal



Auf dem ausgeteilten 60°-Gitter sehen Sie ein Trapez, bei dem die eine der parallenen Steiten genau doppelt so lang ist wie die anderen Seiten. So ein (kürzeres) Seitenelement ist der Initiator, Generator ist wie bei der Kochkurve, nur ragt hier die Zacke in die Figur hinein.

a) Zeichen Sie zwei Stufen ein, wobei die nach der 2. Stufe verbleibende Fläche farbig ausmalen.

b) Wird diese Flächen soweit schrumpfen, dass nichts mehr übrig bleibt oder können Sie eine Schranke für die Anzahl von kleinen gleichseitigen Dreicken angeben, die auch beim Grenz-Fraktal noch übrig sind?

c) Geben Sie ein Lindenmayer-Axiom für das Trapez an, eine Regel und den erläuterten Anfang des Lindenmayer-Wortes für die 1. Stufe.

Aufgabe 4 Spiel des Lebens

a) Nennen Sie die Regeln für den Zellulären Automaten nach Conway, den man "Spiel des Lebens" nennt.

b) Zeichen Sie im Spiel des Lebens dass  mit Recht ein "Gleiter" genannt wird (4 Schritte)

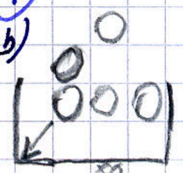
c) Welche Bedeutung haben Zelluläre Automaten?

---

zu (4)

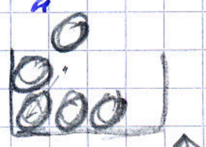
a) überleben bei genau 2 oder 3 Nachbarn
geboren werden bei genau 3 "

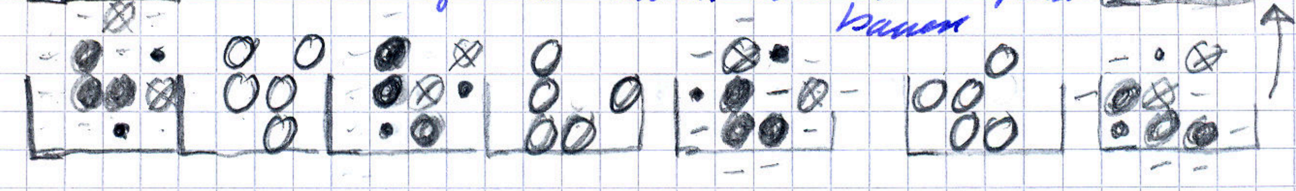
b)



c) Mit den Gleitern baut man logische Schaltung und kann theoretisch Computer bauen

4





Zellular Automaten spielen bei der Modellierung von Musterbildungen in der Natur eine große rolle.

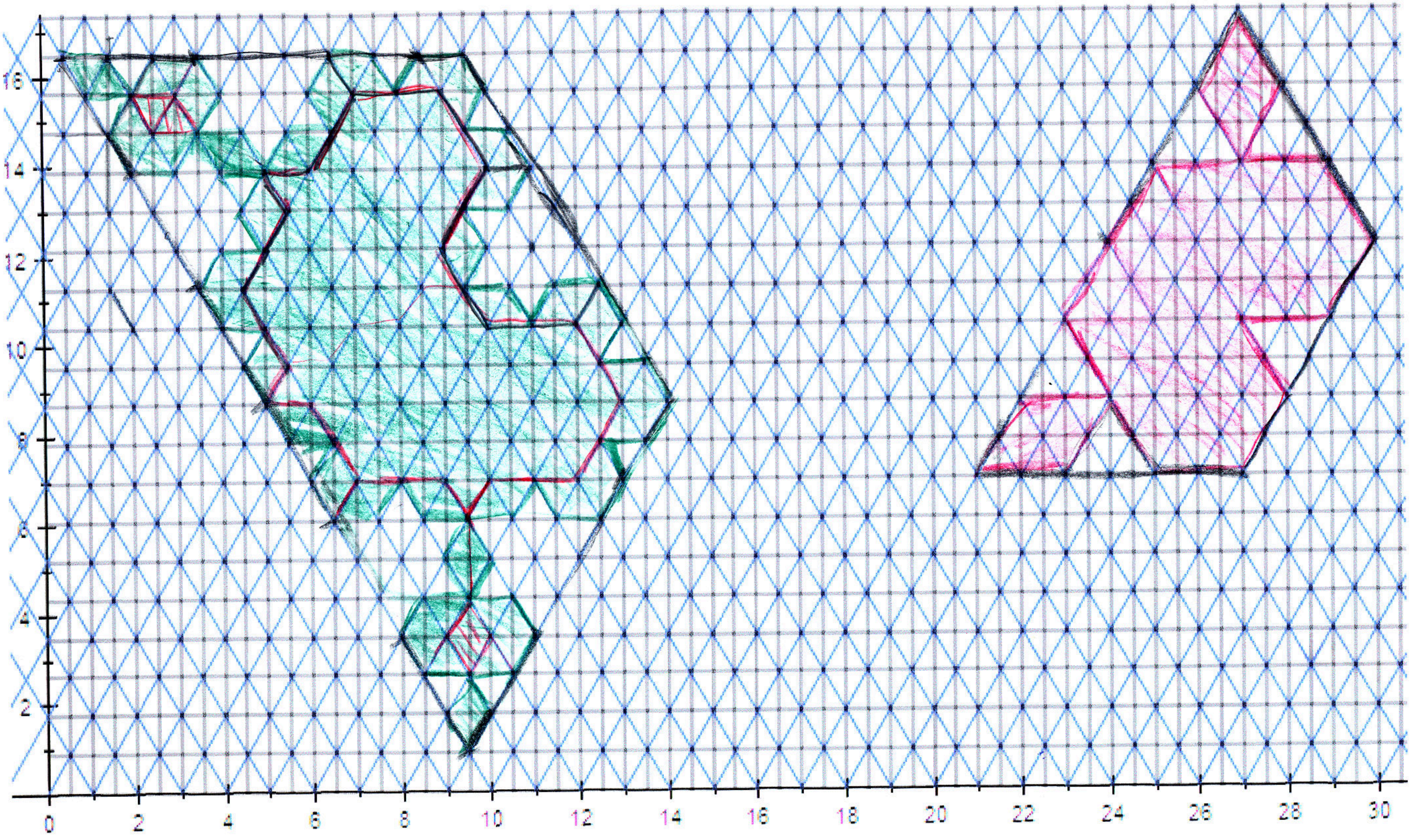
zu 3) a) siehe Extrablatt.

b) Da das Schneeflocken-Fraktal von Koch stets in einem 6-Eck bleibt, bleiben auch hier etliche Dreiecke übrig. 106 sind links rot ausgemalt.

c) Axiom F − F − F − − F F − −

Regel F ⟶ F − F + + F − F

Wort F-F++F-F − F-F++F-F − F-F++F-F − − ...



Axiom F-F-F--FF--

Regel F → F-F++F-F

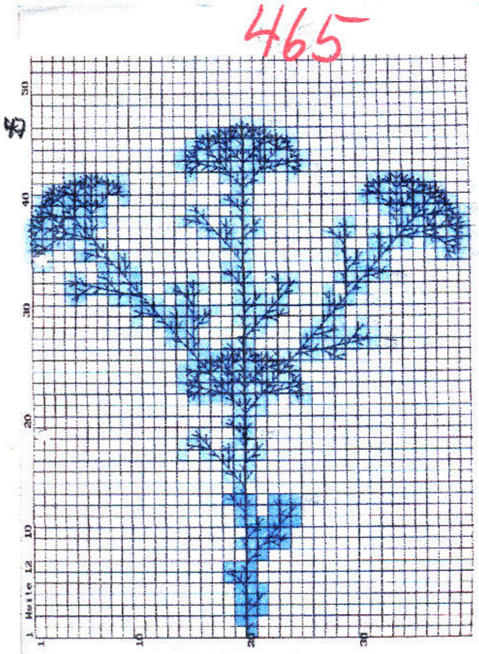
Fraktale Geometrie

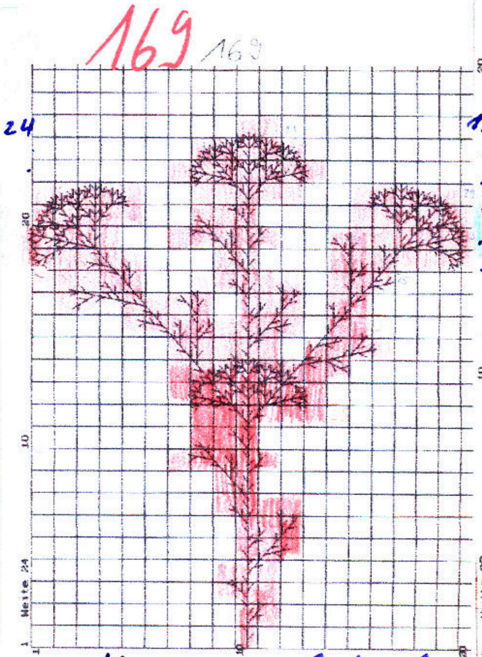
Prof. Dr. Dörte Haftendorn 28. Jan 2008

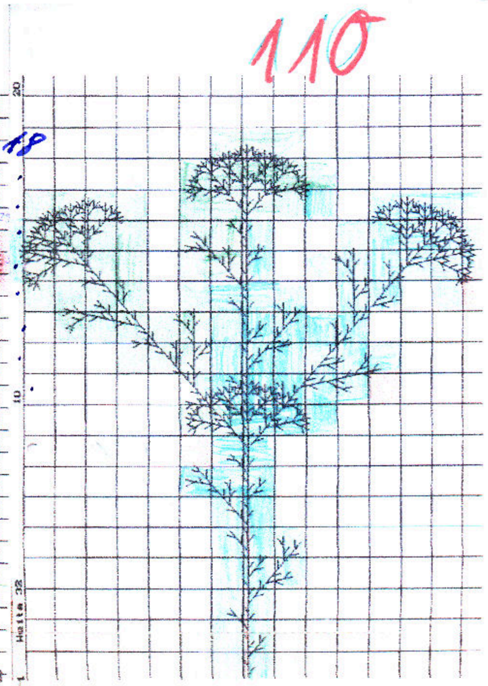
Aufgabe 5 Bestimmung der Boxdimension der Dolde

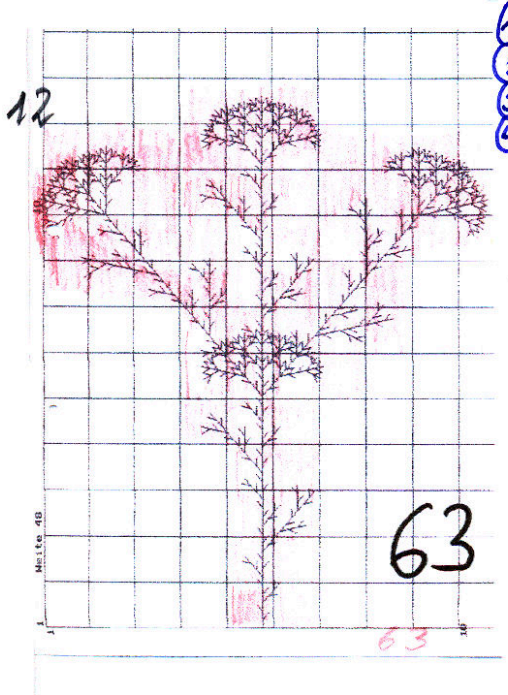
k = Größe des Fraktals in Karos links ablesbar, links oben k=47
m= Zahl der vom Fraktal getroffenen Karos. (Wurde von Schülern gezählt).

a) Zeigen Sie, wie die die Punkte in dem x-y-Koordinatensystem , das unten schon angegeben ist, zustande kommen.
b) Legen Sie nach Sicht eine Ausgleichsgerade hindurch und bestimmen Sie deren Steigung.
c) Geben Sie die Boxdimension des Dolden-Fraktals an. Begründen Sie dieses Vorgehen.



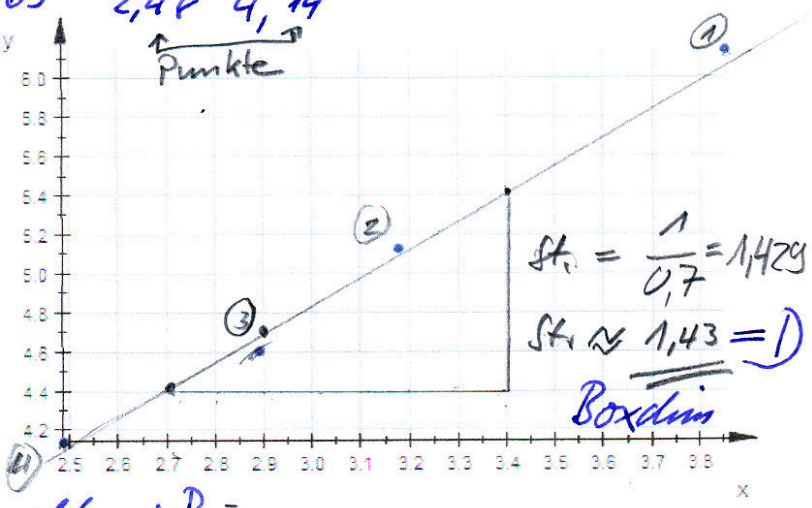






	K	m	ln k	ln m
1	47	465	3,8	6,14
2	24	169	3,17	5,13
3	18	110	2,89	4,7
4	12	63	2,48	4,14

Punkte



St. = $\frac{1}{0,7}$ = 1,429

St. ≈ 1,43 = D

Boxdim

Es gilt $m = k^D \cdot \bar{c}$

$\boxed{\ln m = D \cdot \ln k + \ln \bar{c}}$ gerade

St.