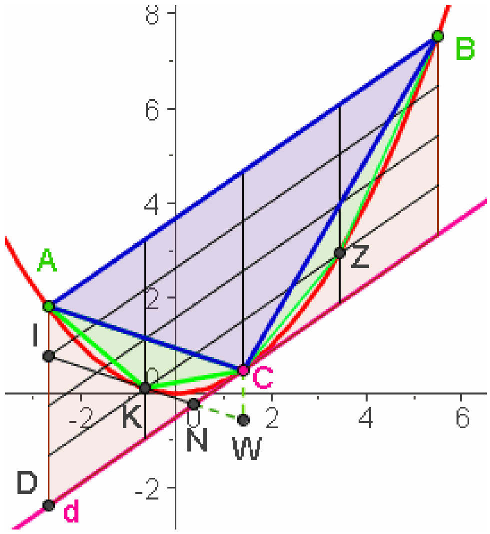
Erste Staatsprüfung für das Lehramt an Berufsbildenden Schulen
Prof. Dr. Dörte Haftendorn (Mit CAS-Taschenrechner TI-voyage o.ä.) Herbst 2006

Aufgabe 1 Numerik und Analysis

Keplers Integrationsregel gründet sich auf die Fläche unter einer Parabel. Deren Fläche kannte Kepler aus der Exhaustionsmethode des Archimedes. Um diese geht es in Teil a), b) und c).

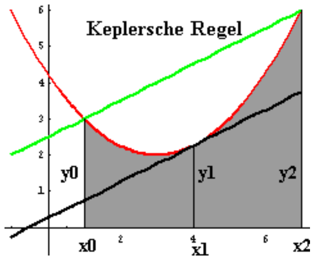


Gezeichnet ist die Parabel $y = \frac{1}{4}x^2$.

Arbeiten Sie im Folgenden mit dieser Parabel. Warum bedeutet das keine Einschränkung der Allgemeinheit?

a) Zeigen Sie (mit Analysis), dass die Tangente an einer Stelle c parallel zur Sehne an den Stellen c-r und c+ r ist, für beliebiges r. Alle weiteren Eigenschaften des “Bärenkastens” können Sie dann ohne Beweis verwenden.

b) Von dem so gebildeten Bärenkasten BK nimmt das blaue Dreieck -seine Fläche heiße ***F***- ersichtlich die Hälfte ein.
Begründen Sie elementargeometrisch, dass die beiden grünen Dreiecke zusammen die Größe $\frac{1}{4}F$ haben.

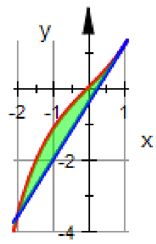


c) Wie kommt man nun zu der Erkenntnis, dass zwischen der Sehne AB und der Parabel $\frac{2}{3}$ der Bärenkastenfläche BK liegen? BK nicht berechnen.

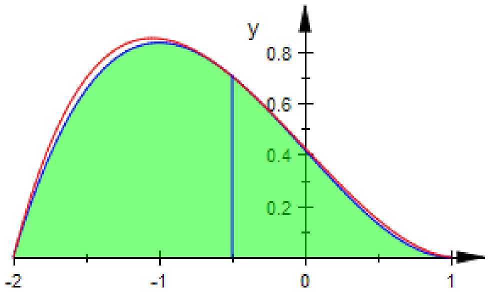
d) Wie kommt nun Kepler zu seiner Regel, die in heutiger Form

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \cong \frac{x_2 - x_0}{6}\left(y_0 + 4y_1 + y_2\right)$$

lautet?



e) Berechnen Sie die Fläche zwischen der Sinushyperbolikus-Funktion $f(x) = \sinh(x)$ und ihrer Sehne, genommen an den Stellen **a= - 2** und **b=1.** Die Gegebenheiten sind rechts dargestellt. Verwenden Sie CAS und Integration. Aber gehen Sie kurz darauf ein, warum die Bestimmung von Hand kein Problem ist.



f) Bestimmen Sie dieselbe Fläche mit der Keplerregel in einem Schritt. Rechts ist rot die Differenzfunktion aus f und der Sehne dargestellt. Zeichen Sie freihand die Parabel ein, die hinter der Keplerformel steht.

g) Weiter ist rechts ein Polynom 3. Grades dargestellt, das durch die drei Kepler-Stützpunkte verläuft, und grün die Fläche unter diesem Polynom.
Warum konnte man erwarten, dass diese grüne Fläche recht gut die in e) zu bestimmende Fläche annähert, wie ja auch zu sehen ist?

h) Welche Gleichung hat das Polynom, wenn bei 1 eine doppelte Nullstelle angenommen wird?