

Aufgabe 2 Analysis: Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Taylorreihen...

Es geht um die Funktionen f_k mit $f_k(x) = \begin{cases} x^k \cos(\frac{1}{x}) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$ und $k \in \mathbb{N}_0$.

a) Entwickeln Sie den Graphen von f_0 aus graphischer Verkettung. Begründen Sie damit wesentliche Eigenschaften. Geben Sie alle Extremstellen als Term an.

b) Skizzieren Sie den Graphen von f_1 unter Verwendung von f_0 als Produkt. Begründen Sie damit wesentliche Eigenschaften. Geben Sie alle Berührstellen mit $y=x$ als Term an.

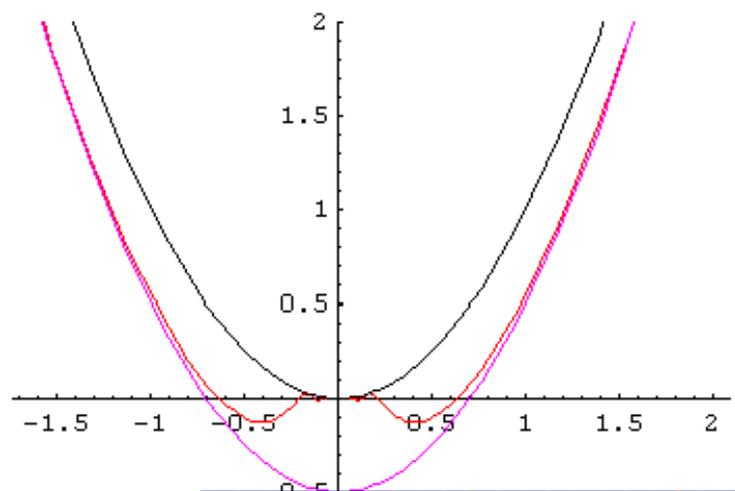
c) Geben Sie begründet für $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ an, ob f_k überall stetig ist. Wie sehen die Graphen für höhere k in der Nähe von 0 aus?

d) Geben Sie begründet für $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ an, ob f_k differenzierbar ist und ob die Ableitung, falls sie existiert, überall stetig ist.

f) Rechts ist der Graph von f_2 mit seiner Asymptote dargestellt. Bestimmen Sie die Asymptote, indem Sie in der Taylorreihe des Kosinus $x \rightarrow \frac{1}{x}$ substituieren.

g) Zeigen Sie mit der Regel von l'Hospital, dass $\lim_{x \rightarrow \infty} (x \cos(x) - x) = 0$ ist.

Was heißt das für die Asymptote von f_1 ?



Aufgabe 3

Analysis, Polynome

a) Gesucht ist ein zum Ursprung punktsymmetrisches Polynom 3. Grades, das die Gerade g mit $g(x) = x - 3$

in $B(2/-1)$ berührt.

Ergebnis zur Sicherheit:

$$f(x) = \frac{3}{16}x^3 - \frac{5}{4}x$$

a) Durch Berührungspunkt, Tangente und Wendepunkt ist in der gezeichneten Weise eine Kastenzelle definiert. Bestätigen Sie, dass der Graph die obere Kastenecke trifft.

b) Berechnen Sie die Schnittstelle mit der Kastenmittellinie. Bestimmen Sie die dunkelgraue Fläche durch Integration.

c) Das Verhältnis der hellen (oberen) zur dunkelgrauen (unteren) Fläche ist 3 : 1 ist. Wie groß sind sie dann zusammen und welchen Anteil das gesamten Kastens nehmen sie ein?

d) Mit welcher Grundidee überträgt man einmal nachgewiesene Eigenschaften auf andere Polynome 3. Grades? Skizzieren zwei wesentliche verschiedene andere Fälle mitsamt der gezeigten Flächeneigenschaft (ohne Terme, ohne Rechnungen).

