

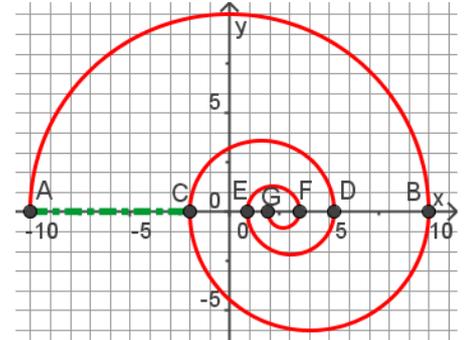
Analysis I

Prof. Dr. Dörte Haftendorn Ti-Nspire o.ä. erlaubt.

10. Juli 2009

Aufgabe 1 Die platte Schnecke Mathina

Mathina ist eine platte zweidimensionale Schnecke, die in dem abgebildeten Haus wohnt. Es ist aus Halbkreisen gebaut. Der erste Durchmesser ist 20, alle folgenden sind 60% des vorigen Durchmessers.



- Welche Länge hat ihr Haus mit den 6 Bögen?
- Welche Länge hat ihr Haus mit unendlich vielen Bögen?
- Die Strecke AC kann sie mit Schleim verschießen. Wie groß ist dann die Fläche ihres Hauses?
- Bestimmen Sie die Koordinaten von C, D und E und beweisen Sie damit, dass ihr Haus (gemessen an der x-Achse) mit einer geometrischen Folge enger wird.

Aufgabe 2 Handwerk

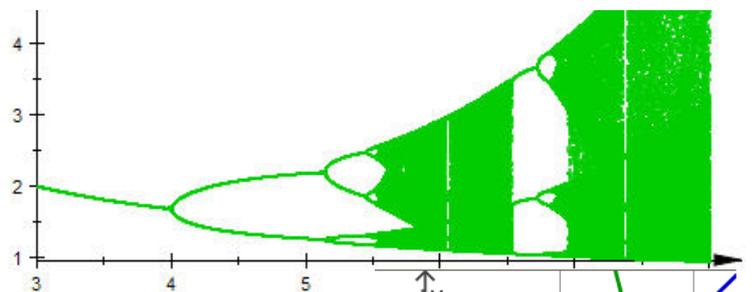
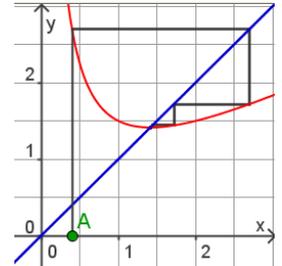
- $f(x) = x \cdot e^{-x}$. Bilden Sie vier Ableitungen, eine davon von Hand.
- Beweisen Sie das auffällige Ergebnis mit vollständiger Induktion.
- Integrieren sie die Funktion f von 0 bis b mit CAS. Welches Vorgehen hätte man von Hand nehmen müssen?
- Überlegen Sie, ob das Integral für b gegen unendlich einen Grenzwert hat und skizzieren Sie diese Fragestellung.

Aufgabe 3 Rekursion Heron

- Zeigen Sie, dass die Rekursion $a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{r}{a_n} \right)$ den Fixpunkt

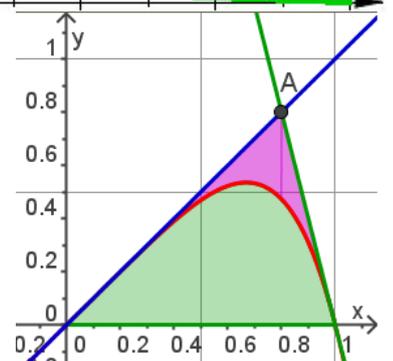
$$a = \sqrt[k]{r} \text{ hat.}$$

- Gezeichnet ist rechts die Trägerfunktion für $r=2, k=2$. Berechnen Sie für den Startwert 0.4 drei Folgenglieder und beziehen Sie ihre Rechnung auf die Zeichnung.
- Für welches k wird die Steigung im Fixpunkt (-1)? Warum ist das interessant? Was hat Ihr Ergebnis mit dem Feigenbaumdiagramm zu tun?
- Wie entsteht das Feigenbaumdiagramm bei dieser Aufgabe?



Aufgabe 4 Polynome

Bei der Polynomschar f_k mit $f_k(x) = x - x^k$ ist das Verhältnis der grünen zur violetten Fläche stets $k : 1$. Zeigen Sie dieses allgemein. Skizzieren sie auch einige Funktionen für andere k. Was haben sie gemeinsam?



Anmerkung: Etwa 90% der so vergebenen Punkte werden die Bemessungsgrundlage 100%. Vergraben Sie sich nicht lange in Termumformungen.

Gutes Gelingen