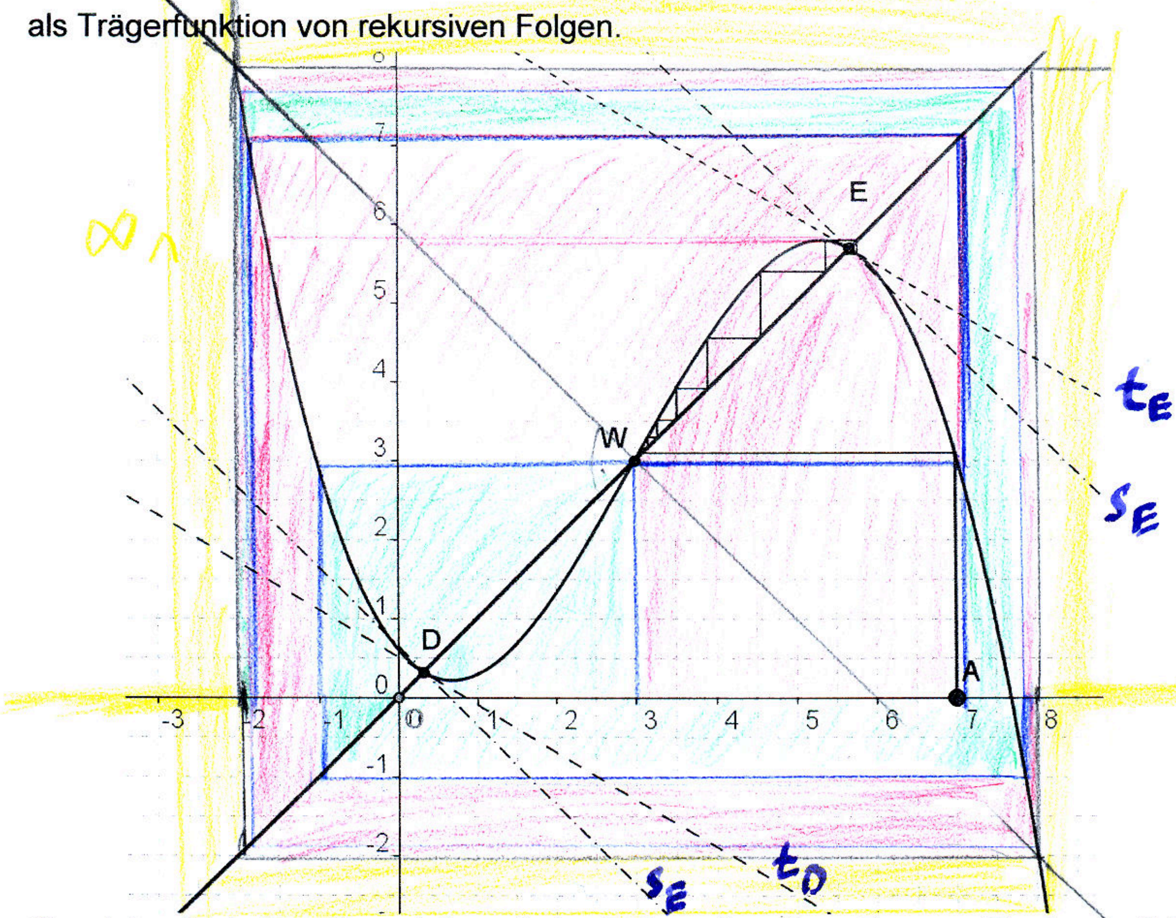
Analysis I

Prof. Dr. Dörte Haftendorn   Ti-n Nspire o.ä. erlaubt.   Seite 2 / 2   30. Jan 2008

Aufgabe 4 Gegeben ist $f_c(x) = -\frac{1}{9}(x-3)^3 + c(x-3) + 3$

als Trägerfunktion von rekursiven Folgen.



Gezeichnet ist oben für c=1.8 und eine Folge, die mit x_0=7 gegen E mit x_E =5.68 stebt.

a) Markieren Sie mit verschiedenen Farben auf der x-Achse alle Bereiche für Startwerte x_0 so dass
   a. die Folge gegen x_E =5.68 stebt,
   b. die Folge gegen x_E =0.32 stebt,
   c. die Folge gegen Unendlich stebt,
   d. die Folge gegen x_W =3 stebt.

b) Berechnen Sie die Wendesteigung. Welche Bedeutung bekommt dadurch c?

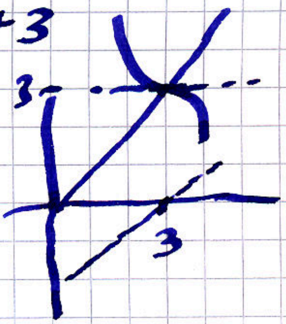
c) Zu dem Graphen sind noch die Tangenten in E und D und die Senkrechten auf die Winkelhalbiernde y=x in E und D gezeichnet. Äußern Sie sich im Folgenden **verbal, unterstützt von Freihandskizzen (mind. 6)**, die das Verhalten von Folgen für die wesentlichen Fälle zeigen. Sagen Sie dabei, was es nützt, in einer dynamsichen Realisierung die gestrichelten Geraden eingezeichnet zu haben. Hätten Sie Weiteres eingezeichnet?:

   Wie verändert sich das Bild, wenn c von diesem Wert c=1.8 aus
   a. wächst?
   b. abnimmt bis 1?
   c. weiter abnimmt bis -1?
   d. noch weiter abnimmt?

Anmerkung: Jeder Aufgabenschritt erhält entsprechend seinem Aufwand angemessene Punkte. Etwa 90% der so vergebenen Punkte werden die Bemessungsgrundlage 100%. Es werden Punkte aus allen Aufgaben gewertet. Also machen Sie alles, was Sie gut und flüssig können. Bei entdeckten Fehlern kommentieren Sie passend, rechnen Sie nicht neu. Vergraben Sie sich nicht lange in Termumformungen.

Gutes Gelingen

Aufgabe 4 $f_c(x) = -\frac{1}{9}(x-3)^3 + c(x-3) + 3$



Sattelpkt $y = -\frac{1}{9}(x-3)^3 + 3$ W(3|3)

$y = c(x-3)$

sorgt für eine Scherung

Man sieht den Wendepunkt.

Rechnerisch $f_c'(x) = -\frac{1}{3}(x-3)^2 + c$

$f_c''(x) = -\frac{2}{3}(x-3)$

$f_c''(x) = 0 \iff x = 3$ wie erwartet.

b) $f_c(3) = 0 + 0 + 3 = 3$ " " $W = (3|3)$

Wendesteigung $f_c'(3) = 0 + c = c$

wird allein von c gesteuert

Also W ist Fixpunkt, liegt auf $y = x$

W ist anziehend (sicher) $|c| < 1$ A

abstoßend (sicher) $|c| > 1$ B

extra zu untersuchen $c = 1$ und $c = -1$

C D

c) Bezeichnung s_E, s_D seien die Senkrechten auf der $y=x$

t_E, t_D " " Tangenten.

für $c = 1{,}8$ in der Zeichnung sind die Tangenten flacher als die Senkrechten.

Also sind hier D und E anziehende Fixpkte.

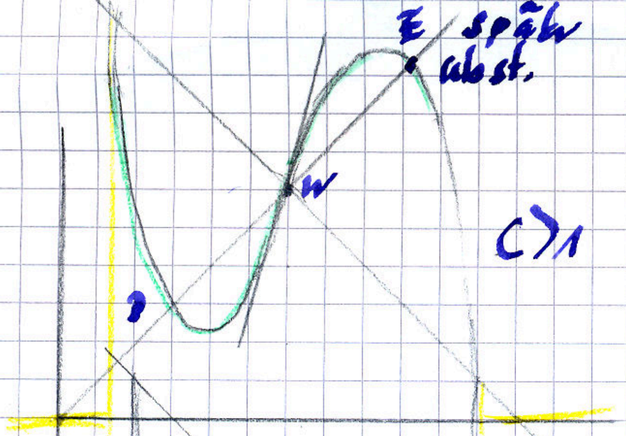
Da f_c symmetrisch zu W ist haben immer
Pkt-symm
D und E das gleiche Verhalten.

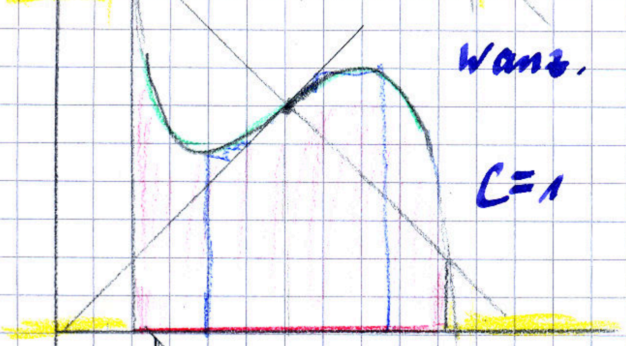
Wenn man c verändert z.B. vergrößert dreht sich t_E auf t_D dann hat man den Grenzfall

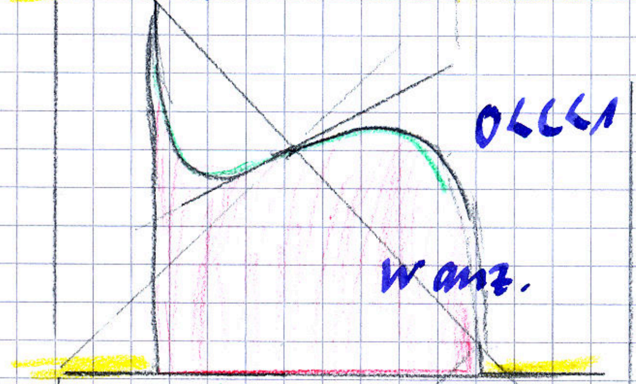
t_E steiler t_D dann wird E abstoßend

entsprechend D.

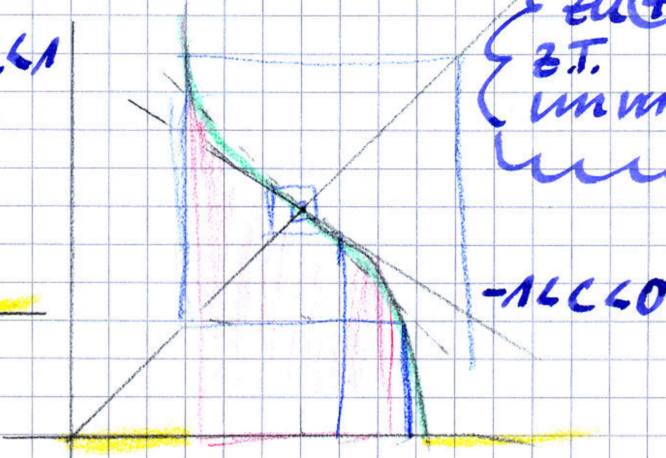
Die Senkrechte s_W in W auf wh: y=x gliedert die Bereiche. Für c>-1 gibt es immer außer W zwei zu W symmetrisch gelegene Schnittpunkte von f_c und s_W.
Außerhalb dieser liegt immer bestimmte Divergenz vor.

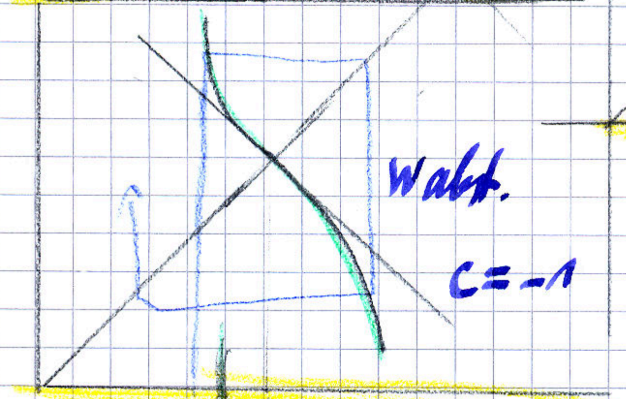




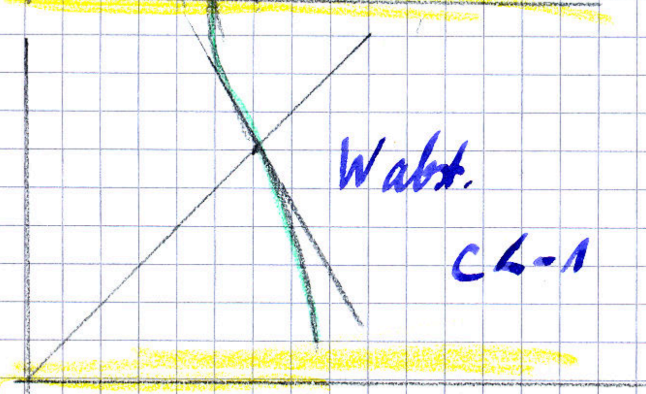


zu (4)
z.T. unverlangt





Für c ≤ -1 gibt es ausschließlich bestimmte Divergenz.
Für -1 < c ≤ 1 liegt innerhalb der erwähnten Schnittpunkte S_i Konvergenz gegen W vor.



Für c>1 wird W abstoßend. Zunächst aber entstehen D und E als anziehende Fixpunkte.
Für große c werden auch sie abstoßend und zwischen den S_i gibt es eine Gefangenenmenge.

zu ④ unverlangt

Berechnungen der Schnittpunkte S_i

$f_c \cap s_w$ $\qquad s_w(x) = -(x-3)+3 = -x+6$

$f_c = -\frac{1}{9}(x-3)^3 + c(x-3) + 3$

$s_w(x) = f_c(x) \qquad -\frac{1}{9}(x-3)^3 + c(x-3) + 3 = -(x-3)+3$

$(x-3)\left(-\frac{1}{9}(x-3)^2 + c + 1\right) = 0$

$x=3$ trivial

$(x-3)^2 = 9(c+1)$

S_i: $\qquad x = 3 \pm 3\sqrt{c+1}$

Ordinaten $y_{S_i} = -(3 \pm 3\sqrt{c+1} - 3) + 3$

$= \mp 3\sqrt{c+1} + 3$

$S_1 = (3 - 3\sqrt{c+1} \,|\, 3 + 3\sqrt{c+1})$ $\qquad c=3 \Rightarrow S_1 = (-3|9)$

$S_2 = (3 + 3\sqrt{c+1} \,|\, 3 - 3\sqrt{c+1})$ $\qquad S_2 = (9|-3)$

im gezeichneten Beispiel $c = 1{,}8$

$S_1 = (-2{,}01996.. \,|\, 8{,}01996)$

$S_2 = (8{,}01996.. \,|\, -2{,}01996)$

S_i existieren nur für $c \geq -1$ was klar war.

$c = -1$ fallen sie mit W zusammen.

Berechnung E, D $\quad f_c(x) = x$

$-\frac{1}{9}(x-3)^3 + c(x-3) + 3 = x$

$(x-3)\left(-\frac{1}{9}(x-3)^2 + c - 1\right) = 0$

$x=3$ klar.

$(x-3)^2 = 9(c-1)$

$x = 3 \pm 3\sqrt{c-1}$

$D = (3 - 3\sqrt{c-1} \,|\, 3 - 3\sqrt{c-1})$

$E = (3 + 3\sqrt{c-1} \,|\, 3 + 3\sqrt{c-1})$

existieren für $c > 1$

$c = 1$ mit W zusammen.

Steigung in E, D

$f_c'(3 \pm 3\sqrt{c-1})$

$= -\frac{1}{3} \cdot 9(c-1) + c$

$= -3c + 3 + c$

$= 3 - 2c$

$f_c'(x_E) = -1$

$3 - 2c = -1$

$2c = 4$

$\underline{\underline{c = 2}}$

für $c > 2$ gibt es keine Konvergenz über volle mehr.