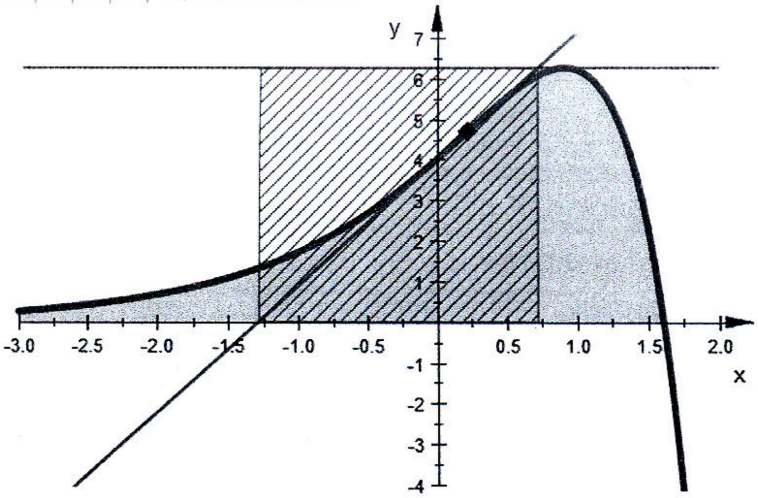
Aufgabe 2 Gegeben ist die Schar f_k mit

$$f_k(x) = e^x(k - e^x) \text{ mit } k > 0$$



a) Entwickeln Sie die Graphen von f_k als Produkt zweier Bausteine. Beschreiben Sie, wie sich die Scharkurven verändern, wenn k wächst.

b) Bestimmen Sie die Nullstelle von f_k. Für welches k ist links der Graph gezeichnet?

c) Berechnen Sie die links unbegrenzte Fläche zwischen f_k und der x-Achse bis zur Nullstelle.

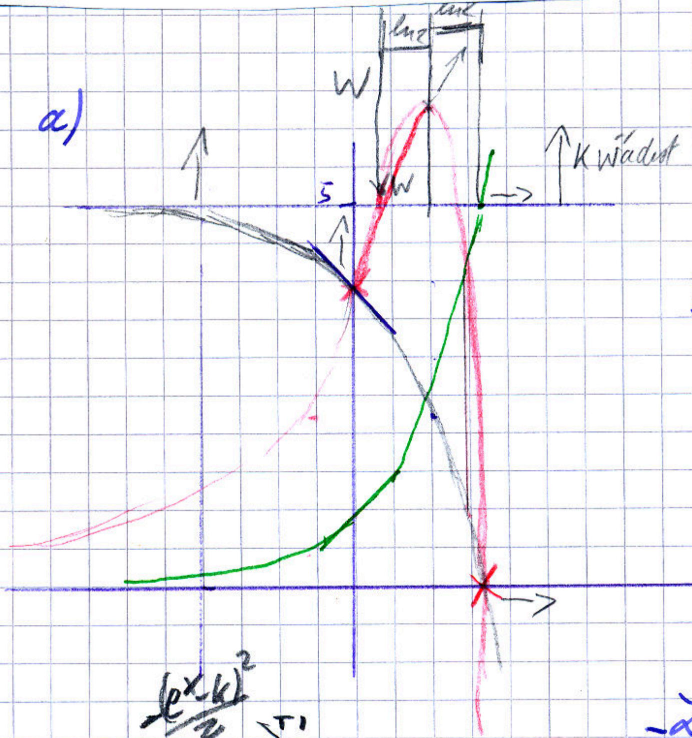
d) Berechen Sie das Extremum und den Wendepunkt von f_k.

e) Was kann man Besonderes über die Extremstelle und die Wendestelle im Vergleich zur Nullstelle sagen?

f) Der eingezeichnete Kasten ist 2 Einheiten breit und so hoch wie der maximale Wert. Vergleichen Sie seine Fläche mit der Fläche aus c).

g) Machen Sie das Folgende nur, wenn Sie noch Zeit haben: Weisen Sie nach, dass der in f) genannte Kasten wirklich stets von der Wendetangente definiert wird und dass der Wendepunkt in ihm stets eine besondere Lage hat.

a)



Wenn k wächst, bleibt die x-Achse Asymptote
Nullstelle wandert nach rechts
Ordinatenabschnitt w. nach oben
im bei k=1
Extrempunkt wandert nach "NO".

b) $f(x)=0 \iff e^x(k-e^x)=0 \iff k-e^x=0$
$e^x=k$
$x=\ln k$
$k>0 \Rightarrow$ stets definiert.
$0<k<1 \Rightarrow$ Nullstelle negativ.
Gezeichnet ist $k=5$, denn Ord.Abschnitt bei 4

c) $f(x)=ke^x-e^{2x}$

$$\int_{-\infty}^{\ln k} f(x)\,dx = \lim_{c\to-\infty}\int_c^{\ln k}(ke^x-e^{2x})\,dx$$

$$=\lim_{c\to-\infty}\left[ke^x-\frac{1}{2}e^{2x}\right]_c^{\ln k} = \lim_{c\to-\infty}\Big(k\cdot k-\frac{1}{2}(k)^2-\underbrace{ke^c}_{\to 0}+\underbrace{\frac{1}{2}e^{2c}}_{\to 0}\Big)$$

$$=k^2-\frac{1}{2}k^2=\frac{1}{2}k^2$$ Grenzwert existiert

d) $f'(x)=ke^x-2e^{2x}$ Eine Extremstelle ist sicher $f'(x)=0$
$\iff (k-2e^x)=0 \iff e^x=\frac{k}{2}$
$f''(x)=ke^x-4e^{2x}$
$x=\ln\frac{k}{2}=\ln k-\ln 2$
Eine Wendestelle ist sicher $f''(x)=0 \iff e^x=\frac{k}{4}$ $x=\ln k-2\ln 2$

Die Wendestelle hat einen konstanten Abstand von $2\ln 2$ zu x_0
" Null " " " " " $\ln 2$ zu x_0
sie liegt immer in der Mitte von x_w und x_0

Werten ② zu d. Ordinaten

$f(x_e) = \frac{k}{2}\left(k-\frac{k}{2}\right) = \frac{k^2}{4}$ im Bild $y_e = \frac{25}{4} = 6{,}25$ passt.

$f(x_w) = \frac{k}{4}\left(k-\frac{k}{4}\right) = \frac{3}{16}k^2 = \frac{3}{4}\cdot\frac{k^2}{4}$ im Bild ebenso:

$y_w = \frac{3}{16}\cdot 25 = \frac{75}{16} = 4{,}6875$ passt.

$E\left(\ln k - \ln 2 \mid \frac{k^2}{4}\right)$

$W\left(\ln k - 2\ln 2 \mid \underbrace{\frac{3}{4}\cdot\frac{k^2}{4}}_{3k^2/16}\right)$

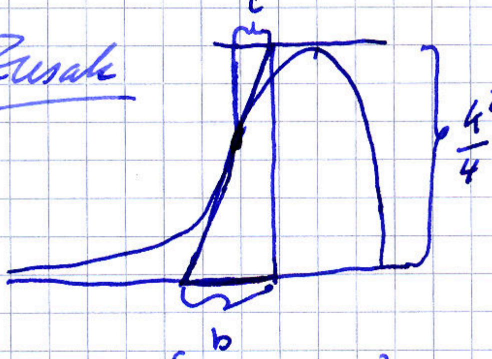
e) Text schon oben

$\underset{x_w}{\times} \xrightarrow{\ln 2} \underset{x_e}{\times} \xrightarrow{\ln 2} \underset{x_0 = \ln k}{\times}$ Konstante Abstände

f) $F_{Kasten} = 2\cdot\frac{k^2}{4} = \frac{k^2}{2} = \int_{-\infty}^{\ln k} \dots$ aus c)

Also hat der Kasten denselben Flächeninhalt wie die uneigentliche Integralfläche.

g) Zusatz



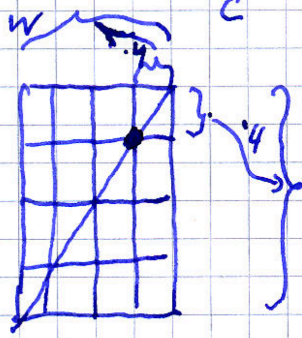
$m = f'\left(\ln\frac{k}{4}\right) = k\cdot\frac{k}{4} - 2\cdot\frac{k^2}{16} = \frac{k^2}{8}$

$= \frac{k^2}{4} : b = \frac{k^2}{4b} \Rightarrow b = 2$ unabh. von k

Der Kasten hat immer die Breite 2

Lage W 

$\frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{k^2}{4}}{c} = \frac{k^2}{8} \Rightarrow c = \frac{1}{2}$ unabhängig von k

Also 

W liegt stets in der oberen Viertelstelle.