

# Analysis I

**Aufgabe 1** a) Beweisen Sie mit Vollständiger Induktion, dass gilt  $15 \mid 25^n - 10$ .

b) Für welches a und b ist Obiges ein Spezialfall der Aussage  $a \mid (a+b)^n - b$  ?

c) Gilt die Aussage  $a \mid (a+b)^n - b$  für jede Wahl von natürlichen Zahlen a und b?

a)  $15 \mid 25^n - 10 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}: k \cdot 15 = 25^n - 10$   
 $\Leftrightarrow k \cdot 15 + 10 = 25^n$

Verankerung  $\left( \begin{array}{l} n=1 \\ n=2 \end{array} \right. \begin{array}{l} 15 = 25 - 10 \\ 25^2 - 10 = 625 - 10 = 615 = \frac{41}{k} \cdot 15 \end{array} \text{ wahre Aussage} \right)$

JA  $\exists k: k \cdot 15 = 25^n - 10 \Leftrightarrow k \cdot 15 + 10 = 25^n$

$n \rightarrow n+1$  Ziel  $\exists k^* \in \mathbb{N}: 25^{n+1} - 10 = k^* \cdot 15$

Also  $25^{n+1} - 10 = 25^n \cdot 25 - 10 = \underbrace{(k \cdot 15 + 10)}_{\text{JA}} \cdot 25 - 10$   
 $= k \cdot 15 \cdot 25 + 250 - 10$   
 $= k \cdot 25 \cdot 15 + 240$   
 $= k \cdot 25 \cdot 15 + 16 \cdot 15$   
 $= \underbrace{(k \cdot 25 + 16)}_{k^* \in \mathbb{N}} \cdot 15 \quad \text{q.e.d.}$

b)  $a=15 \quad b=10 \quad 15 \mid (15+10)^n - 10$

c)  $a=3 \quad b=2 \quad 3 \mid 5^n - 2$   
 $n=2 \rightarrow 3 \mid 25 - 2$

$\Leftrightarrow 3 \mid 23$  falsche Aussage

also gilt b) nicht für alle a, b und alle n.