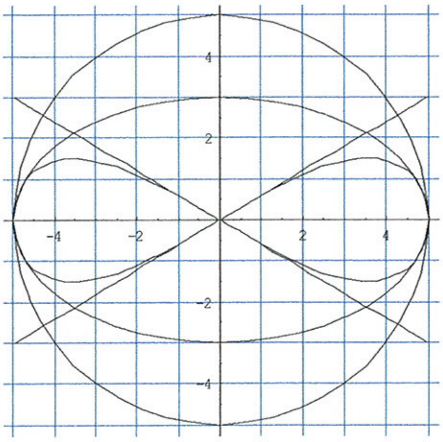
Johanneum
Leistungskurs
Prof. Dr. Dörte Haftendorn

Mathematik

Schriftliches Abitur 2001
Prüfungsgruppe:
Vorschlag I Aufgabe 2

Aufgabe 2 Algebraische Kurven



Gegeben ist eine Schar algebraischer Kurven $\boldsymbol{K_t}$ in einer Parameterdarstellung:

$$x_t(\varphi) = 5\cos(\varphi)$$
$$y_t(\varphi) = \frac{t}{2}\sin(2\varphi) \quad \text{mit } t>0$$

a) Rechts ist die Kurve $\boldsymbol{K_3}$ zusammen mit ihrem Ursprungs-Tangentenpaar $\boldsymbol{G_t}$, einer Ellipse und einem Kreis gezeichnet. Wie wird die Kurve durchlaufen, wenn φ von 0 bis 2π wächst? Geben Sie aufgrund dieser Überlegung die Extrema (in algebraischer Schreibweise) an. Welche besondere Eigenschaft haben die Extrema der Schar?

b) Zeigen Sie, dass alle $\boldsymbol{K_t}$ die Gleichung

$$y^2 = \frac{t^2}{625}x^2(25 - x^2) \text{ erfüllen.}$$

c) Zeigen Sie: $\boldsymbol{K_t}$ liegt im Inneren der Ellipse $\boldsymbol{E_t}$ mit $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{t^2} = 1$ und der oben gezeichnete Kreis ist stets ein Scheitelkreis von $\boldsymbol{E_t}$.

d) Bestimmen Sie die Gleichungen der Ursprungs-Tangenten $\boldsymbol{G_t}$ und zeigen Sie, dass $\boldsymbol{K_t}$ in der gezeichneten Weise zwischen ihnen liegt, d.h. dass die Kurvenordinaten betragsmäßig nicht größer sind als die Ordinaten der Ursprungs-Tangenten.

e) Zeigen Sie: Die Schnittpunkte der Ursprungs-Tangenten $\boldsymbol{G_t}$ mit der Ellipse liegen senkrecht über, beziehungsweise unter den Extrempunkten.

f) Entwickeln Sie eine vollständig geometrische Konstruktion, die bei Vorgabe von t einen Exrempunkt liefert. Möglicherweise ist der Punkt $P_t(5/t)$ hilfreich. Zeichnen Sie selbst für t=4.
Skizzieren Sie freihand einige Scharkurven.

g) Zeigen Sie, wie auf übliche Weise Punkte der umschließenden Ellipse aus Haupt- und Nebenscheitelkreis erzeugt werden. Stellen Sie eine Beziehung her zwischen der üblichen Parameterdarstellung der Ellipse und der obigen Parameterdarstellung der $\boldsymbol{K_t}$.

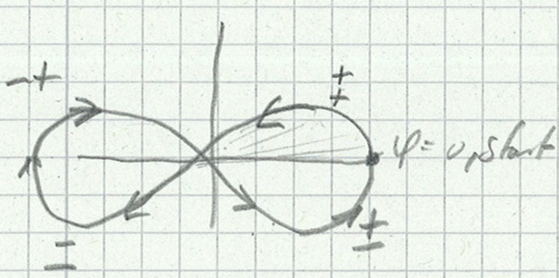
h) Berechnen Sie das Volumen, das bei Rotation von $\boldsymbol{K_t}$ um die x-Achse entsteht und setzen Sie es in Beziehung zu dem des Rotationsellipsoides von $\boldsymbol{E_t}$.

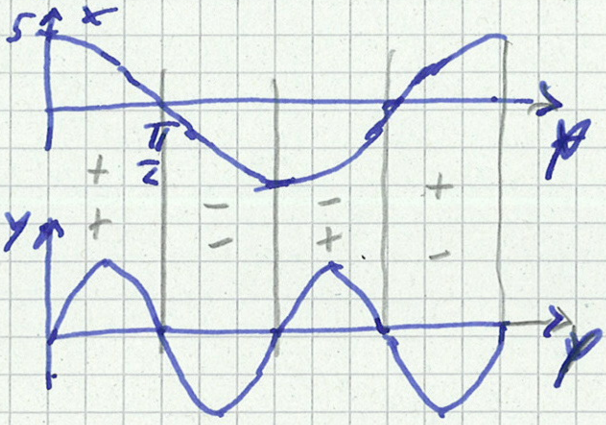
i) Welche Teile dieser Aufgabe lassen sich mit einem Dynamischen Geometrie-System (DGS), welche mit einem numerischen Graphenzeichner (GTR), welche mit einem Computer-Algebra-System (CAS) bewältigen? Geben Sie je ein Beispiel.
Wie beurteilen Sie die Möglichkeit, $\boldsymbol{K_t}$ vollständig als geometrische Konstruktion (ohne das Rechenwerkzeug) in einem DGS zu erzeugen?

Abituraufgabe 2001 A2 Algebraische Kurven

$x_t(\varphi) = 5\cos\varphi$

$y_t(\varphi) = \frac{t}{2}\sin 2\varphi \quad t>0$





Extrema $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\dot y}{\dot x}$ $\qquad \frac{\dot y}{\dot x} = 0 \Leftrightarrow \dot y = 0 \ (\wedge\ \dot x \neq 0)$ passiert stets

$\dot y = 0 \Leftrightarrow (\sin 2\varphi)' = 0 \Leftrightarrow \varphi_1 = \frac{\pi}{4};\ \varphi_2 = \frac{3}{4}\pi$

$\Leftrightarrow 2\cos 2\varphi = 0$ mit $[0, 2\pi]$ $\qquad \varphi_3 = \frac{5}{4}\pi \quad \varphi_4 = \frac{7}{4}\pi$

Extrema $\qquad y_t(\varphi_i) = \frac{t}{2}\cdot(\pm 1)$

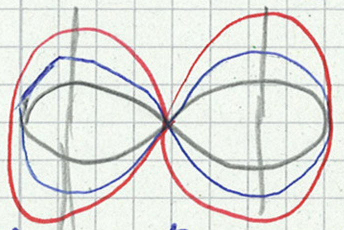
$\left(x\left(\frac{\pi}{4}\right), \frac{t}{2}\right) \quad \left(x\left(\frac{3\pi}{4}\right), -\frac{t}{2}\right) \ \ldots$

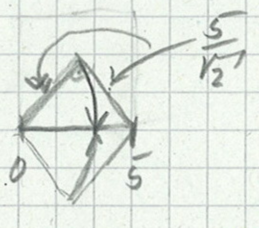
$\left(5/\sqrt{2}, \frac{t}{2}\right) \quad \left(-\frac{5}{\sqrt{2}}, -\frac{t}{2}\right) \quad \left(-\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{t}{2}\right) \quad \left(\frac{5}{\sqrt{2}}, -\frac{t}{2}\right)$

Extremstellen sind unabhängig von t

Extremwerte haben alle Betrag $\frac{t}{2}$

Extrema liegen also alle über- bzw. untereinander.





$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{t} = 1$

$\Rightarrow a = 5$ Scheitelkreis hat Radius 5 wichtig.

b) $y = \frac{t}{2}\cdot 2\sin t\cos t$

$y^2 = t^2\sin^2 t\cos^2 t$

$y^2 = t^2(1-\cos^2 t)\cos^2 t$

$y^2 = t^2\left(1-\frac{x^2}{25}\right)\frac{x^2}{25}$

$y^2 = \frac{t^2}{625}(25-x^2)x^2$

q.e.d.

c) Ellipse $y^2 = t^2\left(1-\frac{x^2}{25}\right)$ $\qquad \cdot\frac{x^2}{25}$

da $|x| \leq 5$

$\Rightarrow x^2 \leq 25$

$\frac{x^2}{25} \leq 1$

sind die Ordinaten der Ellipse stets größer als die Ordinaten von K_t

d) Der Ursprung wird erreicht für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ und $\varphi = \frac{3}{2}\pi$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{t \cdot 2\cos 2\varphi}{-2 \cdot 5 \sin\varphi} = -\frac{t}{10} \cdot \frac{2\cos 2\varphi}{\sin\varphi}$$

Tangente

$\varphi = \frac{\pi}{2}$ $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{-2t}{10} \frac{(-1)}{1} = \frac{t2}{10} = \frac{t}{5}$ $\quad y = \frac{t}{5}x$

$\varphi = \frac{3}{2}\pi$ $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{-2t}{10} \frac{(-1)}{-1} = -\frac{t2}{10} = -\frac{t}{5}$ $\quad y = -\frac{t}{5}x$

Betrachte 1. Quadranten

Tangente $y = \frac{t}{5}x \qquad y^2 = \frac{t^2}{25} \cdot x^2$

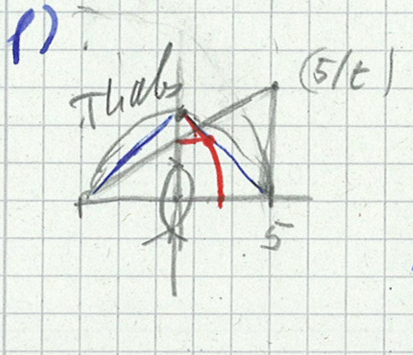
$K_t \quad y^2 = \frac{t^2}{25}x^2 - \frac{t^2x^4}{625} < \frac{t^2}{25}x^2$ für $x \neq 0$

Wegen y^2 und x^2 als ausschließliche Terme in K_t-explizit ist K_t symmetrisch zur y-Achse und zur y-Achse. Also liegt K_t vollständig im Tangenten-Kreuz, wie im Bild.

e) $y^2 = \frac{t^2}{25}x^2 \quad \wedge \quad \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{t^2} = 1 \quad \Big\} \quad 2\frac{x^2}{25} = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{25}{2}$

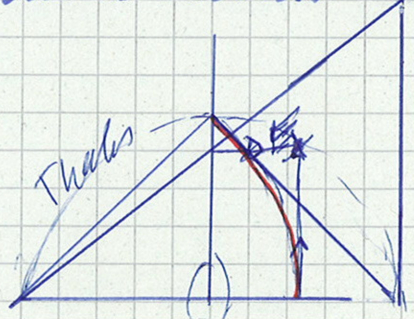
$\frac{y^2}{t^2} = \frac{x^2}{25}$ $\qquad x = \frac{\pm 5}{\sqrt{2}}$ wie oben in a)

f)

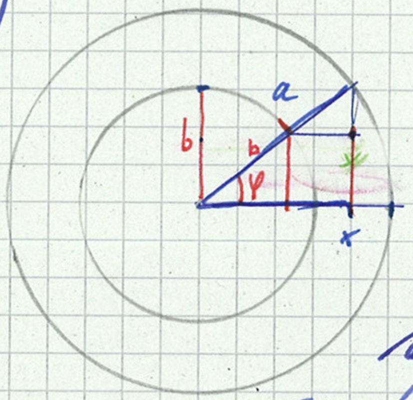


Ein Quadrat mit Diagonale 5 hat Kantenlänge $\frac{5}{\sqrt{2}}$. Mit dem Thaleskreis wird dies konstruiert und zu x-Achse übertragen.

Die Ordinate ergibt sich auf der Mittelsenkrechten durch Schnitt mit der Strecke $\overline{(0|0)(5|t)}$.



g)



φ $x = a \cos\varphi$
$y = b \sin\varphi$

$b = t$

$P(x|)$

K_t: $y = t \cdot \frac{1}{2} \sin 2\varphi$
$= t \sin\varphi \cos\varphi$

Also ist die Ordinate von K_t an der Stelle x gegenüber der Ordinate von der Ellipse mit Faktor $\cos\varphi$ gestaucht.

h) Volumen

$$V_{\frac{1}{2}} = \pi \int_0^5 y^2\,dx = \pi \cdot \frac{t^2}{625} \cdot 2 \cdot \int_0^5 (25x^2 - x^4)\,dx$$

$$= \pi \frac{2t^2}{625}\left[\frac{25}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5\right]_0^5$$

$$= \pi \frac{2t^2}{625}\left(\frac{5^5}{3} - \frac{5^5}{5}\right) = \pi 2 \cdot 5 \cdot t^2\left(\frac{5-3}{15}\right) = \frac{2\pi}{3}t^2$$

$$V_{\frac{1}{2}El} = \pi \int_0^5 y^2\,dx = \pi \cdot \frac{t^2}{25}\int_0^5 (25 - x^2)\,dx = \frac{\pi t^2}{25}\left[25x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^5$$

$$= \frac{\pi t^2}{25}\left(125 - \frac{1}{3}\cdot 125\right) = \pi \cdot 5 t^2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2\pi}{3}t^2 \cdot 5$$

Das Volumen des Ellipsoids ist 5-mal so groß wie das der K_t-Körper $V_{K_t} = \frac{4\pi}{3}t^2$ $V_{El} = \frac{4\pi}{3}t^2 \cdot 5$

i) Für DGS geeignet ist Konstruktion aus f) und g)
Für GTR geeignet ist die gegebene Zeichnung aus den Parameterdarstellungen, die experimentelle Bestimmung der Steigungen in d) und der Extrema a)
Für CAS sind auch Bestimmungen exakt möglich besonders h) und b)

Lösungen Vorschlag I Aufgabe 2 — Lemniskate

	I	II	III	
a) Durchlauf: I.,III., II.,IV. Quadrant mit Begründung	5			
Maximum: Angabe, Begründung, andere Extrema,		5		
für die ganze Schar gleich			2	
b) Herleitung der algebraischen Gleichung. (Auch Bestätigung wird akzeptiert.)	5			
Symmetrie kann ohne Aufforderung gesehen werden.		2		
c) Auflösen der Ellipsengleichung nach y^2 und	1			
Abschätzung nach oben. $y^2 = \frac{t^2x^2}{25^2}(25-x^2) \le \frac{t^2 25}{25^2}(25-x^2) = \frac{t^2}{25}(25-x^2) = y^2_{Ellipse}$		4		
Halbachsen der Ellipse sind 5 und t, daher r=5 Scheitelkreis.	2			
d) Die Tangentensteigung muss durch Ableitung bestimmt werden, entweder aus der Parameterdarstellung oder aus der aus b) naheliegenden expliziten Darstellung. Beide Wege sind gleichwertig. Tangenten $y = \pm \frac{t}{5} x$		8		
Abschätzung nach oben $y^2 = \frac{t^2x^2}{25^2}(25-x^2) \le \frac{t^2x^2}{25 \cdot 25}(25) = y^2_{Tangente}$		4		
e) Schnittproblem $y^2 = \frac{t^2x^2}{25} \wedge y^2 = \frac{t^2}{25}(25-x^2)$ <=> $x^2 = \frac{25}{2}$ wie Extermstellen in a)	3	2		
f) (siehe Extrablatt) Erkenntnis, wie über den Hauptkreis die Extremstelle konstruierbar wird. Alternativ kann die Diagonale des 5-Quadrates verwendet werden. Die Ordinate t/2 ist leicht zu realisieren. Durchführung der Konstruktion.		2	7	
Skizze einiger Scharkurven, sicher müssen die Scheitel bei (±5/0) liegen und die Extrema alle übereinander.		3		
g) (siehe Extrablatt) Bekannte Konstruktion.	6			
Additionstheorem ist für den Vergleich der Parameterdarstellungen nötig. x wird wie bei der Ellipse berechnet, y ist fast so, es wird noch mit dem Faktor cos φ verkleinert.		4	2	
h) Übliche Integration für das Rotationsvolumen, y^2 ist in b) gegeben.	6			
Ergebnis: $\frac{4}{3} \pi t^2$, das ist genau ein Fünftel des umfassenden Ellipsoids.		2		
i) DGS: Teile f) und (aus dem Unterricht bekannt) g) GTR: Ein Bild wie das gegebene lässt sich mit z.B. Winfunktion leicht erzeugen. Allerlei Prüfungen von Vermutungen kann man machen. CAS: die ganze Aufgabe lässt sich lösen, wenn man selbst die mathematischen Ideen hat.		6		
Die Kurven lassen sich sicher vollständig im DGS aus der Ellipsenkonstruktion g) erzeugen, da nur noch mit cos φ gestaucht werden muss. Das müsste über ein passende rechtwinkliges Dreieck gehen. (Unverlangte Durchführung siehe Extrablatt.)			2	
	28	42	13	83

Name: ....Mathematikklausur Nr.7   LK Hb   23.02.2001

Ti 92

1. Ein Sportflugzeug F_1 und ein Hubschrauber F_2 befinden sich auf folgenden Flugbahnen:

$$F_1: \begin{cases} x(t) = -2t \\ y(t) = 0{,}01t^2 + 20 \\ z(t) = 5 \end{cases} \qquad F_2: \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 0{,}1t + 19 \\ z(t) = 0{,}01t + 4 \end{cases} \qquad 1\,\text{LE} \mathrel{\hat{=}} 100\,\text{m};\ 1\,\text{ZE} \mathrel{\hat{=}} 1\,\text{s}$$

Lassen Sie zunächst die Höhe z(t) der Flugzeuge außer Acht und skizzieren Sie den Verlauf der Flugbahnen.

Beurteilen Sie die Situation, indem Sie die im Unterricht behandelten Fragen beantworten:

- Schnittpunkte der Bahnen
- Zeitpunkte, zu denen sich F_1 und F_2 an diesen Punkten befinden
- minimaler Abstand der Flugzeuge

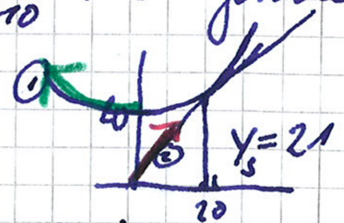
Parameterdarstellung

Nehmen Sie nun die dritte Dimension z hinzu.

- Zu welchem Zeitpunkt haben beide Flugzeuge dieselbe Höhe?
- Geben Sie die Geschwindigkeiten von F_1 und F_2 zu diesem Zeitpunkt an.

2D F_1 $x = -2t$ $y = \frac{t^2}{100} + 20$ } $y = \frac{x^2}{400} + 20$ Parabel

F_2 $x = t$ $y = \frac{t}{10} + 19$ } $y = \frac{x}{10} + 19$ Gerade



Schnitt $\frac{x^2}{400} + 20 = \frac{x}{10} + 19$

$x^2 - 40x + 400 = -400 + 400$

$(x-20)^2 = 0$

$x = 20$ dopp. $\Rightarrow$ Berührung in $(20|21)$

Zeitpunkt F_1 $20 = -2t \Rightarrow t = -10$ } im 30s Abstand

F_2 $20 = t$ $t = 20$

Minimaler Abstand im Grundriss?

$A^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 = (-2t - t)^2 + \left(\frac{t^2}{100} + 20 - \frac{t}{10} - 19\right)^2$

$A^2 = 9t^2 + \left(\frac{t^2}{100} - \frac{t}{10} + 1\right)^2 = 9t^2 + \frac{1}{100^2}(t^2 - 10t + 100)^2$

$A' = \frac{\partial A^2}{\partial t} = 9t^2 + \frac{1}{100^2} \cdot 2(t^2 - 10t + 100) \cdot (2t - 10) -$

$A' = 0 \Leftrightarrow 90000t^2 + 4t^3 - 20t^2 - 40t^2 + 100t + 200t - 1000$

Ti $t_{min} = 0{,}01107$ (in 3D $t_{min} = 0{,}0121815$

Ort $(-0{,}022, 20{,}5)$ Ort $(-0{,}02436, 20{,}5)$

$(0{,}011, 19, 4)$ $(0{,}012, 19{,}0012, 4)$

dieselbe Höhe? Nur F_2 steigt $5 = \frac{t}{100} + 4 \Rightarrow t = 100$ s

Geschwindigkeiten F_1 $V_1 = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{t}{50} \\ 0 \end{pmatrix}$ $V_1(100) = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/10 \\ 1/100 \end{pmatrix}$ konstant

$|V_1|^2 = 8$ $|V_1| \approx 2{,}828$

$|V_2|^2 = 1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} \approx 1$ $|V_2| \approx 100\,\text{m/s} = 360\,\text{km/h}$

$|V_1| =$ [illegible] km/h !!