Texte zum Diskutieren

Schilling: Angew. Analysis, S. 106

Für $f(x) = x^3 - x$ gilt also:

- Für $x \to -\infty$ streben die Funktionswerte gegen $-\infty$.
- Für $x \to +\infty$ streben die Funktionswerte gegen $+\infty$.

Hier wurde eine sog. **Grenzwertbetrachtung** durchgeführt. **Grenzwert** heißt auf lateinisch **limes** und wird in der Mathematik abgekürzt mit „lim".

Die mathematische Schreibweise für die Aufgabenstellung mit Lösung ist:

- $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 - x) = „-\infty"$

Gelesen: Der Limes von $x^3 - x$ für x gegen minus unendlich ist minus unendlich.

- $\lim\limits_{x \to \infty} (x^3 - x) = „\infty"$

Allgemeine Schreibweise für eine Grenzwertbetrachtung, b
$\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ (*Gelesen: Limes von f (x) für x gegen unendlich.*)

Spektrum, Lex. der Mathem. (6 Bd.)

Im Fall $Y = \mathbb{R}$ betrachtet man auch bestimmte Divergenz von $f(x)$ gegen ∞ und $-\infty$: Ist a Häufungspunkt von D, so nennt man ∞ *Grenzwert* oder *Limes von f an der Stelle a*, geschrieben

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \quad \text{oder} \quad f(x) \to \infty \quad (x \to a),$$

genau dann, wenn $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \infty$ gilt für jede Folge (x_n) in $D \setminus \{a\}$ mit $x_n \to a$ für $n \to \infty$, und sagt dann auch „$f(x)$ divergiert (bestimmt) / strebt gegen Unendlich für x gegen a". Man hat genau dann $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, wenn gilt:

$$\forall K > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in D$$
$$(|x - a| < \delta \implies f(x) > K)$$

Demgemäß wird auch bestimmte Divergenz von $f(x)$ gegen $-\infty$ erklärt. Gilt auch $X = \mathbb{R}$, so definiert man entsprechend ∞ und $-\infty$ auch als links- und rechtsseitige Grenzwerte von $f(x)$ an einer Stelle

$a \in X$ und für $x \to \pm\infty$ und bezeichnet ∞ und $-\infty$ dann als *uneigentliche Grenzwerte*.

Richtig:

$$\lim_{x \to 0_+} (x-1)\ln x = \lim_{x \to 0_+} (0-1)\ln x = +\infty$$

d.h. rechtsseitiger Grenzwert
Annäherung von rechts

$$(x-1)\ln x \xrightarrow[x \to 0+]{} \infty$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}-0} \underbrace{x \cdot \tan x}_{f(x)} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}-0} \frac{\pi}{2} \tan x = +\infty$$

$$x \tan x \xrightarrow[x \to \frac{\pi}{2}-0]{} \infty$$

falsch: $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \infty$

$x \tan x = \infty$ für $x = \frac{\pi}{2}$

übrigens gilt:

$$x \tan x \xrightarrow[x \to \frac{\pi}{2}+0]{} -\infty$$

Die Limes-Schreibweise und die Schreibweise mit dem Pfeil sind mathematisch beide in gleicher Weise exakt.
Die Limesschreibweise ist aber umfassender, da sie auch Zwischenschritte und Umwandlungen (z.B. L'Hospitalsche Regel) erlaubt.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \underset{l'H.}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{1}{1} = 1 \quad \text{richtig}$$

falsch $\quad \frac{\sin x}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{\cos x}{1} \xrightarrow[x \to ?]{} 1$, noch schlimmer $\frac{\sin x}{x} = \frac{\cos x}{1} \to 1$