Algebra: Aufbau des Zahlsystems 1/3

Gesetze der Addition bei $\mathbb{N} \to \mathbb{B}$ $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$

Ha 2013

Assoziativität

$((a,b)+(c,d))+(r,s)$

$= (ad+bc,\ bd)+(r,s)$ Def. +

$= ((ad+bc)s+(bd)r,\ (bd)s)$ Def +

$= ((ad)s+(bc)s+(bd)r,\ (bd)s)$ Distr. in $\mathbb{N}$ bzw $\mathbb{Z}$

$= (a(ds)+b(cs)+b(dr),\ b(ds))$ Assoz in $\mathbb{N}$ bzw $\mathbb{Z}$

$= (a(ds)+b((cs)+(dr)),\ b(ds))$ Distr. in $\mathbb{N}$ bzw $\mathbb{Z}$

$= (a,b)+((cs)+(dr),\ ds)$ Def +

$= (a,b)+((c,d)+(r,s))$ Def +

Kommutativität

$(a,b)+(c,d)$

$= (ad+bc,\ bd)$ Def +

$= (bc+ad,\ bd)$ Kom + in $\mathbb{N}$ bzw $\mathbb{Z}$

$= (cb+da,\ db)$ Kom $\cdot$ in $\mathbb{N}$ bzw $\mathbb{Z}$

$= (c,d)+(a,b)$ Def +

Nullelement $(0,1)$ andere Repräsentanten $(0,a)$

$(a,b)+(0,1)$ denn $0\cdot a = 1\cdot 0 \Leftrightarrow (0,1)\cong(0,a)$

$= (a\cdot 1+b\cdot 0,\ b\cdot 1)$ Def +

$= (a+0,\ b)$ 1 in $\mathbb{N}$ bzw $\mathbb{Z}$, 0 annullierend in Halbringen

$= (a,b)$ 0 in $\mathbb{N}$ bzw $\mathbb{Z}$

Nachtrag zur Erinnerung für $\mathbb{N} \to \mathbb{B}$ und $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$

Def $\cong$ $(a,b)\cong(x,y) :\Leftrightarrow ay=bx$

Def + $(a,b)+(x,y) := (ay+bx,\ by)$

Diese Addition ist „wohldefiniert", d.h. Repräsentanten-unabh. (Beweis auf der Site)

Damit sind $(\mathbb{B},+)$ bzw $(\mathbb{Q},+)$ als Halbgruppen nachgewiesen.

Gesetze der Multiplikation bei $\mathbb{N} \to \mathbb{B}$; $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$

Hu 2013

Def. $\cdot$ $(a,b)\cdot(x,y) := (a\cdot x, b\cdot y)$

<u>Wohldefiniertheit</u>: $(a',b') \cong (a,b) \wedge (x',y') \cong (x,y)$

also $a'b = b'a \wedge x'x = y'y$

$(a',b')\cdot(x',y') := (a'x', b'y')$

Betrachte $(a'x')(by) \underset{\substack{\text{Assoz}\\ \mathbb{N};\mathbb{Z}}}{=} a'x'by \underset{\substack{\text{Komm, Ass}\\ \mathbb{N};\mathbb{Z}}}{=} (a'b)(x'y) = (b'a)(y'y)$

$\underset{\substack{\text{Ass, Kom}\\ \mathbb{N};\mathbb{Z}}}{=} b'y'\cdot ax \underset{\text{Ass.}}{=} (b'y')(ax)$ d.h. $(a'x', b'y') \cong (ax, by)$

Also $(a',b')\cdot(x',y') \cong (a,b)\cdot(x,y)$

qed.

<u>Assoziativität</u>

$\big((a,b)\cdot(c,d)\big)\cdot(r,s) \underset{\text{Def.}}{=} (a\cdot c, b\cdot d)\cdot(r,s) \underset{\text{Def.}}{=} \big((ac)r, (bd)s\big)$

$\underset{\substack{\text{Ass in}\\ \mathbb{N};\mathbb{Z}}}{=} \big(a(cr), b(ds)\big) = (a,b)\cdot(cr, ds) \underset{\text{Def.}}{=} (a,b)\big((c,d)\cdot(r,s)\big)$ qed

Kommutativität

$(a,b)\cdot(x,y) \underset{\text{Def.}}{=} (ax, by) \underset{\substack{\text{Kom}\\ \mathbb{N};\mathbb{Z}}}{=} (xa, yb) \underset{\text{Def.}}{=} (x,y)\cdot(a,b)$ qed

<u>Einselement</u> $(1,1)$ andere Repräsentanten, $a \neq 0$ (a,a) denn $1\cdot a = 1\cdot a$

$(a,b)\cdot(1,1) \underset{\text{Def.}}{=} (a\cdot 1, b\cdot 1) \underset{1 \text{ in } \mathbb{N};\mathbb{Z}}{=} (a,b)$.

Distributivgesetz $\big((a,b)+(c,d)\big)\cdot(r,s) \overset{!}{=} (a,b)(r,s)+(c,d)(r,s)$

links $\underset{\text{Def}+}{=} (ad+bc, bd)(r,s) \underset{\text{Def}\cdot}{=} \big((ad+bc)r, (bd)\cdot s\big) \underset{\substack{\text{Dist. } \mathbb{N};\mathbb{Z}\\ \text{Assoz}}}{=}$

$(adr+bcr, bds) \underset{\text{Erw}}{=} \big((adr+bcr)s, (bds)s\big) \underset{\substack{\text{Dist}\\ \text{Ass.}}}{=}$

$(adrs+bcrs, bdss) \underset{\substack{\text{Komm}\\ \text{Assoz}}}{=} (ar\cdot ds + bs\cdot cr, bs\cdot ds) \underset{\substack{\text{Def}+\\ \text{Assoz } \mathbb{N};\mathbb{Z}}}{=} (ar,bs)+(cr,ds)$

$\underset{\text{Def.}}{=} (a,b)\cdot(r,s) + (c,d)\cdot(r,s)$ qed

<u>Erweitern</u> $(a,b) \cong (as, bs)$ denn für $s \neq 0$ gilt

$a(bs) \underset{\substack{\text{Kom}\\ \text{Ass}}}{=}_{\mathbb{N};\mathbb{Z}} b\cdot(as)$

Damit sind $(\mathbb{B},+,\cdot)$ bzw $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ Halbringe

Multiplikative Inverse bei $\mathbb{N} \to \mathbb{B}$; $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$

Beh: Das Inverse zu (a,b) ist (b,a) für $a \neq 0$, $b \neq 0$

Also $\boxed{(a,b)\cdot(b,a) = (1,1)}$

Beweis $(a,b)(b,a) \underset{\text{Def.}}{=} (ab, ba) \underset{\substack{\text{Komm}\\ \mathbb{N};\mathbb{Z}}}{=} (ab, ab) \cong (1,1)$ denn $a\cdot b \neq 0$

Das Nullelement $(0,1)$ ist annullierend

$(a,b)\cdot(0,1) = (a\cdot 0, b\cdot 1) \underset{\substack{0 \text{ in } \mathbb{N};\mathbb{Z}\\ 1 \text{ in } \mathbb{N};\mathbb{Z}}}{=} (0,b) \cong (0,1)$