Äquivalenzrelation

Äquivalenzrelation, ↗Relation $R \subseteq M \times M$, die den folgenden drei Bedingungen genügt (wie üblich wird im folgenden für zwei in Relation stehende Elemente x, y die Bezeichnung $x \sim y$ anstatt $(x, y) \in R$ verwendet):

1. Reflexivität:

$$\bigwedge_{x \in M} (x \sim x),$$

d. h., jedes Element steht zu sich selbst in Relation,

2. Symmetrie:

$$\bigwedge_{x,y \in M} (x \sim y \Rightarrow y \sim x),$$

d. h., steht x mit y in Relation, so auch y mit x,

3. Transitivität:

$$\bigwedge_{x,y,z \in M} (x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z),$$

d. h., stehen sowohl x und y als auch y und z in Relation, so auch x und z.

Jeder Äquivalenzrelation $R \subseteq M \times M$ auf der Menge M entspricht bijektiv eine disjunkte Zerlegung (Klasseneinteilung) der Menge M, d. h., M ist die disjunkte Vereinigung von Mengen M_ι:

$$M = \dot{\bigcup}_{\iota \in I} M_\iota,$$

wobei I eine geeignete Indexmenge ist.

Spektrum-Lexikon Mathematik

Formale Definition [Bearbeiten]

Eine Äquivalenzrelation auf einer Menge M ist eine Teilmenge $R \subseteq M \times M$, welche folgende Bedingungen erfüllt:

- Reflexivität: Für alle $a \in M$ ist $(a, a) \in R$.
- Symmetrie: Für alle $a, b \in M$, für die $(a, b) \in R$ gilt, ist auch $(b, a) \in R$.
- Transitivität: Für alle $a, b, c \in M$ mit $(a, b) \in R$ und $(b, c) \in R$ gilt, dass auch $(a, c) \in R$.

Üblicherweise schreibt man

$a \sim_R b$ oder einfach $a \sim b$ statt $(a, b) \in R$,

und dann nehmen diese Forderungen genau die in der Einleitung genannte Form an.

(Hinweis: Eine *Relation* auf einer Menge *M* kann mit der Menge der in dieser Relation stehenden Paare identifiziert werden. Danach ist eine Relation auf *M* einfach eine Menge solcher Paare, das heißt eine Teilmenge der kartesischen Produkte von *M* mit sich selbst.)

Wikipedia

$\sim$ sei Äquivalenzrelation
$\Rightarrow M$ wird in disjunkte Klassen aufgeteilt

Bew $[a] = \{x \mid x \sim a\}$, $[b]$ ...

$a \sim a \Rightarrow a \in [a] \Rightarrow [a] \neq \emptyset$

$m \in [a] \wedge m \in [b] \Rightarrow$

$m \sim a \wedge m \sim b \underset{sy}{\Rightarrow} a \sim m \wedge m \sim b$

$\underset{tr}{\Rightarrow} a \sim b \Rightarrow a \in [b]$

$\Rightarrow \forall x \in [a] : x \sim a \wedge a \sim b \Rightarrow x \sim b$

$\Rightarrow x \in [b] \Rightarrow [a] \subseteq [b]$

ebenso $[b] \subseteq [a] \Rightarrow [a] = [b]$

$\Rightarrow \forall a, b : [a] = [b] \vee [a] \wedge [b] = \emptyset$

qed

„$\Leftarrow$" gilt auch
„Jede Klasseneinteilung erzeugt eine Äquivalenzrelation

Definition einer Äquivalenzrelation [Bearbeiten]

Das Wort „äquivalent" stehe im Folgenden für eine dieser Beziehungen zwischen zwei Objekten; dass zwei Objekte *a* und *b* äquivalent sind, sei durch *a* ~ *b* symbolisiert.

Alle diese Begriffe haben die folgenden drei Eigenschaften:

- Reflexivität: $a \sim a$

  Jedes Objekt ist zu sich selbst äquivalent.

- Symmetrie: $a \sim b \Leftrightarrow b \sim a$

  Wenn *a* zu *b* äquivalent ist, dann ist auch *b* äquivalent zu *a* (und umgekehrt).

- Transitivität: $a \sim b$ und $b \sim c \Rightarrow a \sim c$

  Wenn *a* zu *b* äquivalent und *b* zu *c* äquivalent ist, dann ist *a* äquivalent zu *c*.

Jede Beziehung zwischen Objekten, die diese Eigenschaften hat, heißt eine *Äquivalenzrelation*.

Äquivalenzrelation bezeichnet eine [Relation](), die die Eigenschaft hat, gleichzeitig [reflexiv](), [symmetrisch]() und [transitiv]() zu sein.

Die Äquivalenzrelation ist in der Logik und Mathematik von großer Bedeutung:

- Sie teilt eine Menge restlos in nichtleere und disjunkte (elementfremde) Untermengen, *Äquivalenzklassen* genannt.

- Die Klassenbildung mit Hilfe des Äquivalenzbegriffes ermöglicht eine mathematische Begriffsbildung.

Äquivalenz – mathematische Gleichwertigkeit [Bearbeiten]

In der Mathematik möchte man in vielen Zusammenhängen Objekte, die sich in gewissen Aspekten ähneln, als gleichwertig ansehen. Eine Formalisierung der Mindestanforderungen an einen solchen Gleichwertigkeitsbegriff ist der Begriff der Äquivalenzrelation.

Beispielsweise ist jeder Begriff, der als die Gleichheit gewisser Eigenschaften definiert werden kann, eine Äquivalenzrelation:

- die Gleichmächtigkeit endlicher Mengen: zwei endliche Mengen heißen *gleichmächtig,* wenn sie dieselbe Anzahl von Elementen haben;
- die Kongruenz in der Geometrie: zwei Dreiecke sind *kongruent,* wenn sie dieselben Seitenlängen haben;
- die Ähnlichkeit in der Geometrie: zwei Dreiecke sind *ähnlich,* wenn sie dieselben Innenwinkel haben;
- die Kongruenz in der elementaren Zahlentheorie: zwei ganze Zahlen heißen *kongruent modulo n,* wenn sie bei ganzzahliger Division durch n denselben Rest lassen;
- die Gleichheit selbst.

$\mathbb{N}_0 \to \mathbb{B}_0 = \mathbb{Q}_0^+$ $\quad M = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}$

Relation R in M "$\simeq$" $\quad R \subseteq M \times M$

$(a,b) \simeq (x,y) :\Leftrightarrow a \cdot y = b \cdot x$

$\simeq$ ist Äquivalenzrelation

Beweis: reflexiv $(a,b) \simeq (a,b)$

denn $a \cdot b = b \cdot a$ in $\mathbb{N}_0$

symmetrisch $(a,b) \simeq (x,y)$

$\Rightarrow (x,y) \simeq (a,b)$ denn

$ay = bx \Rightarrow xb = ya$

transitiv

$(a,b) \simeq (x,y) \wedge (x,y) \simeq (u,v)$

$\Rightarrow (a,b) \simeq (u,v)$

denn $ay = bx \wedge xv = yu$

$\Rightarrow ayv = bxv \wedge xv = yu$

$\Rightarrow ayv = byu \quad |:y \quad y \neq 0$ sicher

$\Leftrightarrow av = bu$

$\Leftrightarrow (a,b) = (v,u)$ qed