Prof. Dr. Dörte Haftendorn, 5. November 2002

Hat eine algebraische Struktur eine "+" - Verknüpfung und kann man ihre Elemente mit reellen Zahlen multiplizieren, dann kann sie ein Vektorraum ein

$(V,+)_{\mathbb{R}}$ **ist Vektorraum** über dem Körper der reellen Zahlen, wenn folgende

Axiome gelten: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \ldots \in V$, $r, s, t \ldots \in \mathbb{R}$

VR1 (M,+) ist kommutative Gruppe.

VR2 $r \cdot \vec{a} \in V$ Die Multiplikation mit Skalaren ist in V erklärt und es gelten folgende Axiome:

| | | |
|---|---|---|
| (1) | $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$ | Verschmelzungsgesetz |
| A | $(s \cdot r) \cdot \vec{a} = s \cdot (r \cdot \vec{a})$ | gemischtes Assoziativgesetz |
| D1 | $(s + r) \cdot \vec{a} = s \cdot \vec{a} + r \cdot \vec{a}$ | 1. Distributivgesetz |
| D2 | $s \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = s \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b}$ | 2. Distributivgesetz |

## Welt 6 Cafete

Euro-Beträge bilden eine abelsche Gruppe. Euro-Beträge kann man mit reellen Zahlen multiplizieren, das Ergebnis ist ein Euro-Betrag. Mit $\vec{a} = a€$ gelten alle Axiome der Multiplikation mit Skalaren. Also gibt es den Vektorraum der Eurobeträge.

## Welt 4 Polynome bis Grad n

Die Multiplikation einer Parabel p (z.B.) mit einem reellen Faktor ist als Achsenstreckung in üblicher Weise erklärt. $s \cdot \vec{p} := x \to s \cdot p(x)$

Machen Sie sich klar, dass es auf diese Weise die Vektorräume der “Polynome bis zum Grad n” gibt.

## Welt 3 Verschiebungen im 3D-Raum

Die Multiplikation einer Verschiebung $\vec{v}$ mit einem reellen Faktor ist als Verlängerung des zu $\vec{v}$ gehörigen Pfeiles in üblicher Weise erklärt. Ist der Faktor negativ, dreht man den Pfeil um. Machen Sie sich klar, dass es auf diese Weise die Verschiebungen einen Vektorraum bilden.

## Welt 7 Pfeilklassen im 3D-Raum

Im 3D-Raum gibt es Pfeile. Länge und Richtung sind eindeutig feststellbar. Zwei Pfeile gleicher Länge und Richtung sollen “äquivalent” heißen. Das heißt, sie stehen in einer Äquivalenzrelation zueinander. **Dieses sind die üblichen “Vektoren” der Schulmathematik.**

## Definition: Äquivalenzrelation”

Sei $M = \{a, b, c \ldots\}$, in der eine Relation $\cong$ erklärt ist.

Ä1 Refexivität $a \cong a$ für alle $a \in M$

Ä2 Symmetrie $a \cong b \Rightarrow b \cong a$

A3 Transitivität $a \cong b \wedge b \cong c \Rightarrow a \cong c$

Eine Äquivalenzrelation teilt M in “Äquivalenzklassen” ein, d.h. die untereinder äquivalenten Elemente bilden eine Klasse, kein Element gehört zu zwei Klassen, man sagt die Klassen sind “disjunkt”, jedes Element genört zu einer Klasse.