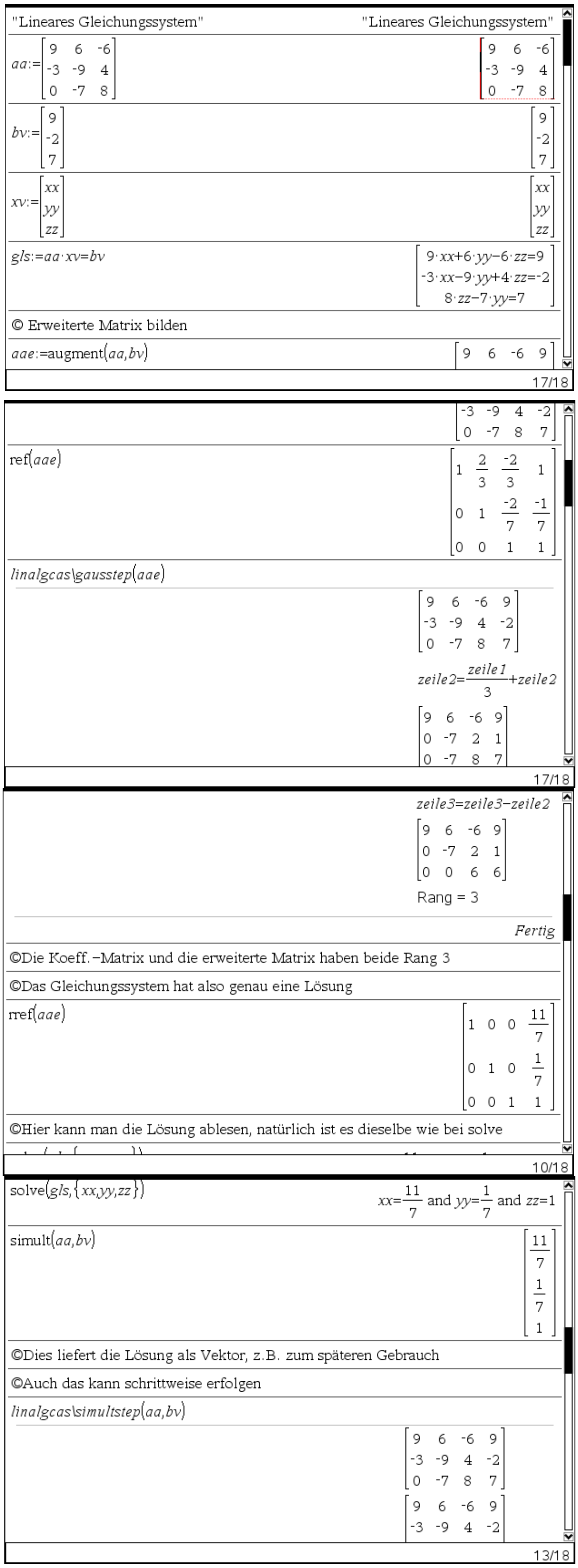
TI nspire Lineare Algebra GLSys mit Gaussalgorithmus—S 1



Datei **gls-gauss.tns**

In dieser Datei werden elegante und schnelle Methoden vorgestellt, wie man mit linearen Gleichungssystemen umgehen kann.

aa ist die Keoffizentenmatrix
bv ist der Vektor der rechten Seite
xv ist der Vektor der gesuchten Lösung.
Es ist hier xx, yy, zz geschrieben, da x,y,z evt. festgelegte Bedeutungen im System haben.
gls ist das ganze Gleichungsystem, man braucht es bei dieser Vorgehensweise eigentlich nicht in dieser Form.

Die „erweiterte Matrix“ eines Gls. entsteht durch Anhängen der rechten Seite.
Hierfür gibt es ein mächtiges Werkzeug, ref(…), dass die Diagonalform einer Matrix erzeugt. ref heißt englisch row echelon form, deutsch wörtlich Reihen-Staffel-Form.
An ihr kann man die Lösung, bzw. die Lösungsmenge direkt ablesen.
In der Bibliothek gibt es eine Datei linalgcas. In ihr sind einige ausführlichere Befehle zum Thema.
Hier entspricht linalgcas\gausstep(aae) dem schrittweisen Vorgehen, wie man es auch von Hand machen würde.
Wenn in der letzen Zeile zwei Zahlen stehen, ich nenne sie r und s, so muss man deuten r*zz=s dann hat man zz, wenn nicht r=0 ist (zu dem Fall siehe nächste Seite).
Das setzt man in die vorletzte Zeile ein, hier -7 yy +2 zz=1 und so geht man hoch.
Die gesamte Lösung erhält man schneller durch rref(…) (reduzierte Diagonalform)
Dieselbe wie bei solve()
Für die Anwendungen (in Wirtschaft z.B.) ist es wichtig, den Lösungsvektor als wirklichen Vektor zu haben. Das leistet simult(aa,bv)
Da muss man aber die Koeffizientenmatrix und die rechte Seite getrennt aufführen.
ref() und rref() brauchen die erweiterte Matrix, solve braucht wirklich das Gleichungssystem.

simult geht auch schrittweise, das halte ich für unnötig.

Es folgt Seite -2-

Es existieren auch noch Dateien gls-2x2-matrizen.tns und ti-linalg-gls-2x2-matrizen.pdf

TI nspire Lineare Algebra GLSys mit Gaussalgorithmus—S 2

Dies ist der Fall mit leerer Lösungsmenge

"Lineares Gleichungssystem" "Lineares Gleichungssystem"

$aa:=\begin{bmatrix}9&6&-6\\-3&-9&4\\0&-7&2\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}9&6&-6\\-3&-9&4\\0&-7&2\end{bmatrix}$

$bv:=\begin{bmatrix}9\\-2\\7\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}9\\-2\\7\end{bmatrix}$

$xv:=\begin{bmatrix}xx\\yy\\zz\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}xx\\yy\\zz\end{bmatrix}$

$gls:=aa\cdot xv=bv$ $\begin{bmatrix}9\cdot xx+6\cdot yy-6\cdot zz=9\\-3\cdot xx-9\cdot yy+4\cdot zz=-2\\2\cdot zz-7\cdot yy=7\end{bmatrix}$

© Erweiterte Matrix bilden

$aae:=\text{augment}(aa,bv)$ $\begin{bmatrix}9&6&-6&9\\-3&-9&4&-2\\0&-7&2&7\end{bmatrix}$

8/11

Datei am TI gls-gauss.tns

$\begin{bmatrix}-3&-9&4&-2\\0&-7&2&7\end{bmatrix}$

$zeile2=\frac{zeile1}{3}+zeile2$

$\begin{bmatrix}9&6&-6&9\\0&-7&2&1\\0&-7&2&7\end{bmatrix}$

$zeile3=zeile3-zeile2$

$\begin{bmatrix}9&6&-6&9\\0&-7&2&1\\0&0&0&6\end{bmatrix}$

Rang = 3

Fertig

©Die erweiterte Matrix hat Rang 3, die Koeeffizientenmatrix aber nur Rang 2

©Darum ist dieses Glsys "nicht lösbar", genauer: Die Lösungsmenge ist leer.

3/11

Es folgt der letzte typische Fall:

Gleichungssystem mit eindimensionaler Lösungsmenge, gezeigt in "Notes", Haftendorn Nov. 2010

$\mathbf{aa}:=\begin{bmatrix}9&6&-6\\-3&-9&4\\0&-7&2\end{bmatrix}\blacktriangleright\begin{bmatrix}9&6&-6\\-3&-9&4\\0&-7&2\end{bmatrix}$ Das ist die Koeffizientenmatrix.

$\mathbf{bv}:=\begin{bmatrix}9\\-2\\1\end{bmatrix}\blacktriangleright\begin{bmatrix}9\\-2\\1\end{bmatrix}$ Das ist die rechte Seite des Gleichungssystems

$\mathbf{xv}:=\begin{bmatrix}xx\\yy\\zz\end{bmatrix}\blacktriangleright\begin{bmatrix}xx\\yy\\zz\end{bmatrix}$ Das ist der Vektor der gesuchten Größen

$\mathbf{gls}:=\mathbf{aa}\cdot\mathbf{xv}=\mathbf{bv}\blacktriangleright\begin{bmatrix}9\cdot xx+6\cdot yy-6\cdot zz=9\\-3\cdot xx-9\cdot yy+4\cdot zz=-2\\2\cdot zz-7\cdot yy=1\end{bmatrix}$ Das ist das eigentlich gegebene Gleichungssystem. Doppelbuchstaben vermeiden Kollision mit dem den Vorbedeutungen am TI.

Zu einem linearen Gleichunssytem betrachtet man die sogenannte "Erweiterte Matrix

$\mathbf{aae}:=\text{augment}(\mathbf{aa},\mathbf{bv})\blacktriangleright\begin{bmatrix}9&6&-6&9\\-3&-9&4&-2\\0&-7&2&1\end{bmatrix}$. Das Lösungsverhalten ergibt sich aus dem Vergleich des Ranges dieser Matrix mit dem Rang der Koeffizientenmatrix und dem Vergleich mit der Dimension

$\text{linalgcas\textbackslash rank}(\mathbf{aae})\blacktriangleright 2$ aber $\text{linalgcas\textbackslash rank}(\mathbf{aa})\blacktriangleright 2$ und $\dim(\mathbf{aae})\blacktriangleright\{3,4\}$

Die Ränge sind gleich, aber kleiner als die Zeilen−Dimension. Der Unterschied ist 1, darum ist die Lösungsmenge 1−dimensiomal.

Man bekommt diese Informationen auch beim Handeln.

$\text{ref}(\mathbf{aae})\blacktriangleright\begin{bmatrix}1&\frac{2}{3}&\frac{-2}{3}&1\\0&1&\frac{-2}{7}&\frac{-1}{7}\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ Man sieht, die untere Zeile ist eine Nullzeile.

Das Ergebnist ist so zu interpretieren: $\mathbf{vorletzte}:=yy+\frac{-2}{7}\cdot zz=\frac{-1}{7}\blacktriangleright yy-\frac{2\cdot zz}{7}=\frac{-1}{7}$

$\mathbf{loy}:=\text{solve}(\mathbf{vorletzte},\{yy\})\blacktriangleright yy=\frac{2\cdot zz-1}{7}$ Die Variable zz bleibt als Parameter in der Lösung drin. Dies muss man nun in die erste Gleichung einsetzen

$\text{right}(\mathbf{loy})\blacktriangleright\frac{2\cdot zz-1}{7}$ also $\mathbf{erste}:=xx+\text{right}(\mathbf{loy})+\frac{-2}{3}\cdot zz=1\blacktriangleright xx-\frac{8\cdot zz}{21}-\frac{1}{7}=1$

und damit $\mathbf{lox}:=\text{solve}(\mathbf{erste},xx)$ also dann $\mathbf{loes}:=\begin{bmatrix}\text{right}(\mathbf{lox})\\\text{right}(\mathbf{loy})\\zz\end{bmatrix}\blacktriangleright\begin{bmatrix}\frac{8\cdot(zz+3)}{21}\\\frac{2\cdot zz-1}{7}\\zz\end{bmatrix}$

Wenn man sich ein Problem vorstellt, zu dem dieses Gleichungssystem gehören könnte, dann wäre es z.B. ein Schnittproblem von Gerade und Ebene im 3D−Raum.

Das Ergebnis heißt nun: Die Gerade liegt in der Ebene. Das hatt man eigentlich sofort bei der Rang−Betrachtung heraus. $\text{simult}(\mathbf{aa},\mathbf{bv})\blacktriangleright$ "Fehler: Singuläre Matrix"

$\text{rref}(\mathbf{aae})\blacktriangleright\begin{bmatrix}1&0&\frac{-10}{21}&\frac{23}{21}\\0&1&\frac{-2}{7}&\frac{-1}{7}\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ rref() löst hier auch nicht weiter auf.

Hier wird das Vorgehen in der Notes-Seite dargestellt.
Diese Möglichkeit gibt es erst seit der Version 2
Sie hat den riesigen Vorteil, dass die Mathe-Zellen auch bei Änderungen an Ort und Stelle bleiben.
Damit hat man nicht das Problem, dass die neuen Zeilen immer unten angefügt werden. Diese leidige Tatsache macht nämlich ein Verwenden von guten Beispielen sehr schwierig.

In so einer Notesseite kann man sein eigenes Beispiel oben eintragen und die neu definierte Zelle mit Enter abschicken. dann sind sofort alle abhängen Zellen auch geändert.

Am besten ist es daher, ein neues Problem in der Datei aufzumachen. Die Notes-Seite da hinein zu kopieren und dann nach Belieben zu ändern.