TI nspire Lineare Algebra Basis und Dimension

Datei **basis-dim.tns**

In dieser Datei wird lineare Unhabhängigkeit definiert und geprüft.
Als Beispiel dient der R^3 aber man kann alles genauso in andere Räumen machen.
Basis, Dimension und Basiswechsel folgen.

Hier sieht man die Definition pur.

Basis und Dimension, Haftendorn Nov. 2010

n Vektoren avi heißen linear unabhängig, wenn aus

$\sum_{i=1}^{n} (ri \cdot avi) = \mathbf{ov}$ folgt, dass alle Skalare ri Null sind.

$\mathbf{av} := \begin{bmatrix} 9 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix} 9 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$ und $\mathbf{bv} := \begin{bmatrix} 6 \\ -9 \\ -7 \end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix} 6 \\ -9 \\ -7 \end{bmatrix}$ und $\mathbf{cv} := \begin{bmatrix} -6 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix} -6 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}$ und $\mathbf{ov} := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Das zugehörige Gleichungssystem ist dann $\mathbf{gls} := r \cdot \mathbf{av} + s \cdot \mathbf{bv} + t \cdot \mathbf{cv} = \mathbf{ov} \blacktriangleright \begin{bmatrix} 9 \cdot r + 6 \cdot s - 6 \cdot t = 0 \\ -3 \cdot r - 9 \cdot s + 4 \cdot t = 0 \\ 8 \cdot t - 7 \cdot s = 0 \end{bmatrix}$

Es wird gelöst von $\text{solve}(\mathbf{gls}, \{r,s,t\}) \blacktriangleright r=0 \text{ and } s=0 \text{ and } t=0$ Diese Lösung ist eindeutig.
Also sind die drei Vektoren linear unabhängig.

Jeder ander Vektor $\mathbf{pv} := \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$ im R^3 ist lässt sich mit diesen dreien darstellen:

$\mathbf{glsa} := r \cdot \mathbf{av} + s \cdot \mathbf{bv} + t \cdot \mathbf{cv} = \mathbf{pv} \blacktriangleright \begin{bmatrix} 9 \cdot r + 6 \cdot s - 6 \cdot t = u \\ -3 \cdot r - 9 \cdot s + 4 \cdot t = v \\ 8 \cdot t - 7 \cdot s = w \end{bmatrix}$ und

$\text{solve}(\mathbf{glsa}, \{r,s,t\}) \blacktriangleright r = \frac{22 \cdot u + 3 \cdot (v + 5 \cdot w)}{189} \text{ and } s = \frac{-(4 \cdot u + 3 \cdot (4 \cdot v - w))}{63} \text{ and } t = \frac{-(u + 3 \cdot (v - w))}{18}$

Die drei Zahlen r, s und t existieren bei jeder Wahl von u,v und w. Man sagt daher:

Die **linare Hülle** von av, bv und cv ist der ganze Raum R^3 . Sie spannen den R auf.

Sie bilden eine Basis für den R^3 . Mehr als 3 linear unabhängige Verktoren kann es also im R^3 nicht geben. Weniger Vektoren spannen nur eine Ebene auf und nicht den R^3 . So kann man mit jeder Menge von 3 lu−Vektoren argumentieren. Jede solche Menge ist eine Basis, die Zahl 3 heißt Dimension des Raumes R .

Definition der Begriffe

lineare Hülle
Basis
Dimension

Man noch andere Art die lineare Unabhängig, bzw. lineare Abhängigjeit zeigen können:

$\mathbf{basis} := \text{augment}(\mathbf{av}, \text{augment}(\mathbf{bv}, \mathbf{cv})) \blacktriangleright \begin{bmatrix} 9 & 6 & -6 \\ -3 & -9 & 4 \\ 0 & -7 & 8 \end{bmatrix}$ In der Datei gls−gauss sieht man:

$\text{simult}(\mathbf{basis}, \mathbf{ov}) \blacktriangleright \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ oder auch $\mathbf{basise} := \text{augment}(\mathbf{basis}, \mathbf{ov}) \blacktriangleright \begin{bmatrix} 9 & 6 & -6 & 0 \\ -3 & -9 & 4 & 0 \\ 0 & -7 & 8 & 0 \end{bmatrix}$ ergibt

Das weitere nimmt die in der Datei **gls-gauss.tns** gezeigten Methoden für Gleichungssysteme auf.
Ggf. lese man erst diese Datei, bzw. deren pdf.

$\text{rref}(\mathbf{basise}) \blacktriangleright \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, man sieht t=0, danns=0, dann r=0.

$\mathbf{ppv} := \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix}$ ist abhängig von dieser Basis $\text{simult}(\mathbf{basis}, \mathbf{ppv}) \blacktriangleright \begin{bmatrix} \frac{17}{21} \\ \frac{2}{7} \\ 1 \end{bmatrix}$ das sind dann

die r,s und t mit denen sich ppv darstellen lässt:

$\frac{17}{21} \cdot \mathbf{av} + \frac{2}{7} \cdot \mathbf{bv} + 1 \cdot \mathbf{cv} \blacktriangleright \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix}$. Auf diese Weise könnte man auch die Basis wechseln:

$\text{simult}\left(\mathbf{basis}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \blacktriangleright \begin{bmatrix} \frac{22}{189} & \frac{1}{63} & \frac{5}{63} \\ \frac{-4}{63} & \frac{-4}{21} & \frac{1}{21} \\ \frac{-1}{18} & \frac{-1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$ was $\mathbf{basis}^{-1} \blacktriangleright \begin{bmatrix} \frac{22}{189} & \frac{1}{63} & \frac{5}{63} \\ \frac{-4}{63} & \frac{-4}{21} & \frac{1}{21} \\ \frac{-1}{18} & \frac{-1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$ leistet.

Theoretisch wäre der Basiswechsel
$$Basis \cdot W = E$$
also
$$W = Basis^{-1} \cdot E = Basis^{-1}$$
für die Wechselmatrix W.
In der neuen Basis ist
$$\vec{p}^{\,*} = W \cdot p = Basis^{-1} \cdot p$$