Linear abhängig- Linear unabhängig

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Universität Lüneburg, 26. Oktober 2005

$\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$, $\vec{c}=\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$ Drei Vektoren in der Ebene sind sicher linear abhängig.

Gesucht sind r,s,t mit $r\,\vec{a}+s\,\vec{b}+t\,\vec{c}=\vec{o}$. Rechnung von Hand:

$$r\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$(1)\quad r+5s-3t=0$

$(2)\quad 5r+3s+t=0$

r eliminieren $5\cdot(1)-(2)=(3)$: $\quad 22s-16t=0 \Rightarrow s=\frac{8}{11}t$

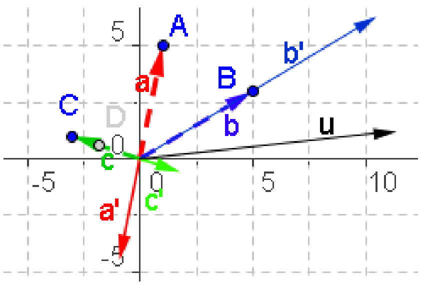
in (1): $\quad r=-5s+3t=-\frac{40}{11}t+\frac{33}{11}t$

$r=-\frac{7}{11}t$

t frei, Wahl $t=\frac{11}{5}=2{,}2 \Rightarrow s=\frac{8}{5}=1{,}6;\ r=-\frac{7}{5}=-1{,}4$

Probe $\frac{1}{5}\left(-7\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}+8\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}+11\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-7+40-33\\-35+24+11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

Dieses Beispiel ist in GeoGebra interaktiv gestaltet, siehe www.uni-lueneburg.de/mathe-lehramt
Der obigen Rechnung entspricht handlungs mäßig folgendes Vorgehen:



Ein Vektor $\vec{u}=r\,\vec{a}+s\,\vec{b}+t\,\vec{c}$ ist Linearkombination der drei gegebenen Vektoren.
Erst werden r und s bei irgendeinem t so eingestellt , dass $\vec{u}=\tilde{t}\,\vec{c}$ gilt, also in Richtung von Vektor c zeigt.
Dann wird nur noch an t gezogen und Vektor u zum Nullverktor gemacht.

In obiger Rechnung hat man mit r und s in Abhängigkeit t von eigentlich erzeugt:

$$\vec{d}=-\frac{7}{11}t\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}+\frac{8}{11}t\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}=\frac{t}{11}\begin{pmatrix}-7+40\\-35+24\end{pmatrix}=t\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}=t\cdot(-\vec{c})$$

Dieses ist die Gleichung der Ursprungsgeraden durch C.

Die Gleichung $r\,\vec{a}+s\,\vec{b}+t\,\vec{c}=\vec{d}+t\,\vec{c}=t(-\vec{c})+t\,\vec{c}=\vec{o}$ ist für jedes t richtig.

In obiger Zeichnung ist D für die Wahl t=-0,6 eingezeichnet.
Die Wahl von t=2,2 erwingt, wie oben berechnet, r=-1,4 und s=1,6 damit Vektor u zum Nullvektor wird. Nun also gilt als Fazit:

Für jede Wahl von t gibt es r und s so, dass $r\,\vec{a}+s\,\vec{b}+t\,\vec{c}=\vec{o}$ wird.

Jeder Vektor der $\vec{p}$ Zeichenebene lässt sich durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eindeutig darstellen, d.h. es gibt eindeutig r und s mit $\vec{p}=r\,\vec{a}+s\,\vec{b}$. **r und s heißen Koordinaten von $\vec{p}$ bezüglich $\vec{a}$ und $\vec{b}$**

Will man den Nullvektor selbst darstellen $\vec{o}=r\,\vec{a}+s\,\vec{b}$, erzwingt das hier $r=0 \wedge s=0$.

Vektoren die in einer Linearkombination des Nullvektors für alle Koeffizienten 0 erzwingen, heißen linear unabhängig. $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind linear unabhängig.