3 Vektoren mit Parameter, einfach

Lineare Abhängigkeit:

Gesucht ist a so, dass die Vektoren linear abhängig werden

$\mathbf{v1}:=\begin{bmatrix}2\\3\\5\end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix}2\\3\\5\end{bmatrix}$ $\mathbf{v2}:=\begin{bmatrix}^-1\\3\\6\end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix}^-1\\3\\6\end{bmatrix}$ $\mathbf{v3}:=\begin{bmatrix}a\\3\\2\end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix}a\\3\\2\end{bmatrix}$

$\text{solve}(s\cdot \mathbf{v1}+r\cdot \mathbf{v2}+t\cdot \mathbf{v3}=0, \{s,r,t\}) \blacktriangleright \text{false}$

$\mathbf{aa}:=\text{augment}(\text{augment}(\mathbf{v1},\mathbf{v2}),\mathbf{v3}) \blacktriangleright \begin{bmatrix}2 & ^-1 & a\\3 & 3 & 3\\5 & 6 & 2\end{bmatrix}$

$\det(\mathbf{aa}) \blacktriangleright 3\cdot(a-11)$ ⚠ Nur wenn die Determinate verschwindet, kann es nichttriviale Lösungen geben. Bei Det≠0 wäre s=r=t=0 die einzig Lösung. Dann wären die Vektoren linear unabhängig. Man soll aber a so suchen, so dass die Vektoren linear abhängig sind. Also $\text{solve}(\det(\mathbf{aa})=0,a) \blacktriangleright a=11$ ⚠ (konnte man ja auch so sehen).

1.1

aa $\quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & a \\ 3 & 3 & 3 \\ 5 & 6 & 2 \end{bmatrix}$

$\text{mRowAdd}(3,aa,1,2)$ $\quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & a \\ 9 & 0 & 3\cdot a+3 \\ 5 & 6 & 2 \end{bmatrix}$

$\text{mRowAdd}\left(6,\begin{bmatrix} 2 & -1 & a \\ 9 & 0 & 3\cdot a+3 \\ 5 & 6 & 2 \end{bmatrix},1,3\right)$ $\quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & a \\ 9 & 0 & 3\cdot a+3 \\ 17 & 0 & 6\cdot a+2 \end{bmatrix}$

$\text{mRow}\left(17,\begin{bmatrix} 2 & -1 & a \\ 9 & 0 & 3\cdot a+3 \\ 17 & 0 & 6\cdot a+2 \end{bmatrix},2\right)$ $\quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & a \\ 153 & 0 & 51\cdot (a+1) \\ 17 & 0 & 6\cdot a+2 \end{bmatrix}$

$umgeformt:=\text{mRowAdd}\left(-9,\begin{bmatrix} 2 & -1 & a \\ 153 & 0 & 51\cdot (a+1) \\ 17 & 0 & 6\cdot a+2 \end{bmatrix},3,2\right)$ $\quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & a \\ 0 & 0 & 33-3\cdot a \\ 17 & 0 & 6\cdot a+2 \end{bmatrix}$

5/99

1.2

Man kann natürlich auch die Gleichung r **v1**+ s **v2**+t **v3**=0 als Gleichungssytem lösen mit den Möglichkeiten, die sich im Caculator−Fenster mit "Zeilenoperationen" für Matrizen ergeben.

Das ergibt dann **umgeformt** ▸ $\begin{bmatrix} 2 & -1 & a \\ 0 & 0 & 33-3\cdot a \\ 17 & 0 & 6\cdot a+2 \end{bmatrix}$

Hier sieht man, $(33-3\ a)\cdot t=0$ ▸ $(33-3\cdot a)\cdot t=0$ ergibt bei a=11 für t eine beliebige Lösung. Damit ergibt sich aus Zeile 3 eine Lösung, nämlich

solve$(17\ r+(6a+2)t=0,r)$ ▸ $r=\dfrac{-2\cdot(3\cdot a+1)\cdot t}{17}$

Aus der ersten Zeile folgt solve$\left(2\ \dfrac{-2\cdot(3\cdot a+1)\cdot t}{17}-s+a\ t=0,s\right)$ ▸ $s=\dfrac{(5\cdot a-4)\cdot t}{17}$

($a\neq 11$) hat r=0, t=0, s=0 zur Folge, Dann sind die Vektoren linear unabhängig.

1.3

$a=11$ hat t bel. $r=\frac{-2\cdot(3\cdot a+1)\cdot t}{17}|a=11 \blacktriangleright r=-4\cdot t$ $s=\frac{(5\cdot a-4)\cdot t}{17}|a=11 \blacktriangleright s=3\cdot t$ zur Folge.

Das heißt, dass die drei Vektoren linear abhänig sind.Mit t=1 folgt

$-4\cdot \mathbf{v1}+3\cdot \mathbf{v2}+\mathbf{v3} \blacktriangleright \begin{bmatrix} a-11 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $-4\cdot \mathbf{v1}+3\cdot \mathbf{v2}+\mathbf{v3}|a=11 \blacktriangleright \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

1.4

3 Vektoren mit Parameter

Lineare Abhängigkeit:

Gesucht ist a so, dass die Vektoren linear abhängig werden

$$\mathbf{v1}:=\begin{bmatrix} a \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix} ▸ \begin{bmatrix} a \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v2}:=\begin{bmatrix} 1 \\ -a \\ 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v3}:=\begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 2\cdot a \end{bmatrix} ▸ \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 2\cdot a \end{bmatrix}$$

$$\text{solve}(s\cdot \mathbf{v1}+r\cdot \mathbf{v2}+t\cdot \mathbf{v3}=0, \{s,r,t\}) ▸ \text{false}$$

$$\mathbf{aa}:=\begin{bmatrix} a & 1 & -2 \\ -3 & -a & -2 \\ 5 & 2 & 2\cdot a \end{bmatrix} ▸ \begin{bmatrix} a & 1 & -2 \\ -3 & -a & -2 \\ 5 & 2 & 2\cdot a \end{bmatrix}$$

$\det(\mathbf{aa}) ▸ -2\cdot(a^3-1)$ ⚠ Nur wenn die Determinate verschwindet, kann es nichttriviale Lösungen geben. Bei Det≠0 wäre s=r=t=0 die einzig Lösung. Dann wären die Vektoren linear unabhängig. Man soll aber a so suchen, so dass die Vektoren linear abhängig sind. Also $\text{solve}(\det(\mathbf{aa})=0,a) ▸ a=1$ ⚠ (konnte man ja auch so sehen).

2.1

$$\begin{bmatrix} a & 1 & -2 \\ 2\cdot(a+2)\cdot(a^2-3) & 0 & -4\cdot(a+1)\cdot(a+2) \\ -2\cdot(a+1)\cdot(2\cdot a-5) & 0 & 4\cdot(a+1)\cdot(a+2) \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{rowAdd}\left(\begin{bmatrix} a & 1 & -2 \\ 2\cdot(a+2)\cdot(a^2-3) & 0 & -4\cdot(a+1)\cdot(a+2) \\ -2\cdot(a+1)\cdot(2\cdot a-5) & 0 & 4\cdot(a+1)\cdot(a+2) \end{bmatrix},2,3\right)$$

$$\begin{bmatrix} a & 1 & -2 \\ 2\cdot(a+2)\cdot(a^2-3) & 0 & -4\cdot(a+1)\cdot(a+2) \\ 2\cdot a^3-2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$umgeformt:=\begin{bmatrix} a & 1 & -2 \\ 2\cdot(a+2)\cdot(a^2-3) & 0 & -4\cdot(a+1)\cdot(a+2) \\ 2\cdot a^3-2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & 1 & -2 \\ 2\cdot(a+2)\cdot(a^2-3) & 0 & -4\cdot(a+1)\cdot(a+2) \end{bmatrix}$$

1/8

2.2

Man kann natürlich auch die Gleichung r **v1**+ s **v2**+t **v3**=0 als Gleichungssytem lösen mit den Möglichkeiten, die sich im Caculator−Fenster mit "Zeilenoperationen" für Matrizen ergeben.

Das ergibt dann **umgeformt** ▸ $\begin{bmatrix} a & 1 & -2 \\ 2\cdot(a+2)\cdot(a^2-3) & 0 & -4\cdot(a+1)\cdot(a+2) \\ 2\cdot a^3-2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Hier sieht man, $(2\,a^3-2)\cdot r=0$ ▸ $(2\cdot a^3-2)\cdot r=0$ ergibt bei a=1 für r eine beliebige Lösung. Damit ergibt sich aus Zeile 2 eine Lösung, nämlich

$\text{solve}\left(2\cdot(a+2)\cdot(a^2-3)\;r-4\cdot(a+1)\cdot(a+2)\;t=0,t\right)$ ▸ $t=\dfrac{(a^2-3)\cdot r}{2\cdot(a+1)}$ or $a=-2$ zu a=−2 siehe unten

Aus der ersten Zeile folgt $\text{solve}\left(r\;a+s+(-2)\;\dfrac{(a^2-3)\cdot r}{2\cdot(a+1)}=0,s\right)$ ▸ $s=\dfrac{-(a+3)\cdot r}{a+1}$ ⚠

($a\neq 1$) hat r=0, t=0, s=0 zur Folge, Dann sind die Vektoren linear unabhängig.

2.3

$a=1$ hat r bel. $t=\frac{(a^2-3)\cdot r}{2\cdot(a+1)}|a=1 \blacktriangleright t=\frac{^-r}{2}$ $s=\frac{^-(a+3)\cdot r}{a+1}|a=1 \blacktriangleright s={}^-2\cdot r$ zur Folge.

Das heißt, dass die drei Vektoren linear abhänig sind. Mit r=1 folgt

$$\mathbf{v1}-2\cdot\mathbf{v2}-\frac{1}{2}\cdot\mathbf{v3} \blacktriangleright \begin{bmatrix} a-1 \\ 2\cdot a-2 \\ 1-a \end{bmatrix} \quad \mathbf{v1}-2\cdot\mathbf{v2}-\frac{1}{2}\cdot\mathbf{v3}|a=1 \blacktriangleright \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Zunächst scheint es noch eine weitere Möglichkeit zu geben:

$a=-2$ hat r=0, t beliebig aus Zeile 2 und s=2 t aus Zeile 1 zur Folge.

$$0\cdot\mathbf{v1}+2\cdot\mathbf{v2}+\mathbf{v3} \blacktriangleright \begin{bmatrix} 0 \\ ^-2\cdot a-2 \\ 2\cdot a+4 \end{bmatrix} \quad 0\cdot\mathbf{v1}+2\cdot\mathbf{v2}+\mathbf{v3}|a={}^-2 \blacktriangleright \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \det(\mathbf{aa}|a={}^-2) \blacktriangleright 18$$

Also ist das doch keine Lösung. Beim Berechnen ist nämlich mit (2 a +4) multipliziert worden und das ist für a=−2 nicht erlaubt.

2.4

$$aa|a=^-2 \qquad \begin{bmatrix} ^-2 & 1 & ^-2 \\ ^-3 & 2 & ^-2 \\ 5 & 2 & ^-4 \end{bmatrix}$$

$$\text{mRowAdd}\left(^-2,\begin{bmatrix} ^-2 & 1 & ^-2 \\ ^-3 & 2 & ^-2 \\ 5 & 2 & ^-4 \end{bmatrix},1,2\right) \qquad \begin{bmatrix} ^-2 & 1 & ^-2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & ^-4 \end{bmatrix}$$

$$\text{mRowAdd}\left(^-2,\begin{bmatrix} ^-2 & 1 & ^-2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & ^-4 \end{bmatrix},1,3\right) \qquad \begin{bmatrix} ^-2 & 1 & ^-2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 9 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} ^-2 & 1 & ^-2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 9 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \qquad 18$$

4/99

2.5