3 Vektoren mit Parameter, einfach

Lineare Abhängigkeit:

Gesucht ist a so, dass die Vektoren linear abhängig werden

$\mathbf{v1}:=\begin{bmatrix}2\\3\\5\end{bmatrix} \triangleright \begin{bmatrix}2\\3\\5\end{bmatrix}$ $\mathbf{v2}:=\begin{bmatrix}-1\\3\\6\end{bmatrix} \triangleright \begin{bmatrix}-1\\3\\6\end{bmatrix}$ $\mathbf{v3}:=\begin{bmatrix}a\\3\\2\end{bmatrix} \triangleright \begin{bmatrix}a\\3\\2\end{bmatrix}$

$\text{solve}(s\cdot \mathbf{v1}+r\cdot \mathbf{v2}+t\cdot \mathbf{v3}=0,\{s,r,t\}) \triangleright \text{false}$

$\mathbf{aa}:=\text{augment}(\text{augment}(\mathbf{v1},\mathbf{v2}),\mathbf{v3}) \triangleright \begin{bmatrix}2 & -1 & a\\3 & 3 & 3\\5 & 6 & 2\end{bmatrix}$

$\det(\mathbf{aa}) \triangleright 3\cdot(a-11)$ Nur wenn die Determinate verschwindet, kann es nichttriviale Lösungen geben. Bei Det≠0 wäre s=r=t=0 die einzig Lösung. Dann wären die Vektoren linear unabhängig. Man soll aber a so suchen, so dass die Vektoren linear abhängig sind. Also $\text{solve}(\det(\mathbf{aa})=0,a) \triangleright a=11$ (konnte man ja auch so sehen).

1.1

$aa \qquad \begin{bmatrix}2 & -1 & a\\3 & 3 & 3\\5 & 6 & 2\end{bmatrix}$

$\text{mRowAdd}(3,aa,1,2) \qquad \begin{bmatrix}2 & -1 & a\\9 & 0 & 3\cdot a+3\\5 & 6 & 2\end{bmatrix}$

$\text{mRowAdd}\left(6,\begin{bmatrix}2 & -1 & a\\9 & 0 & 3\cdot a+3\\5 & 6 & 2\end{bmatrix},1,3\right) \qquad \begin{bmatrix}2 & -1 & a\\9 & 0 & 3\cdot a+3\\17 & 0 & 6\cdot a+2\end{bmatrix}$

$\text{mRow}\left(17,\begin{bmatrix}2 & -1 & a\\9 & 0 & 3\cdot a+3\\17 & 0 & 6\cdot a+2\end{bmatrix},2\right) \qquad \begin{bmatrix}2 & -1 & a\\153 & 0 & 51\cdot(a+1)\\17 & 0 & 6\cdot a+2\end{bmatrix}$

$umgeformt:=\text{mRowAdd}\left(-9,\begin{bmatrix}2 & -1 & a\\153 & 0 & 51\cdot(a+1)\\17 & 0 & 6\cdot a+2\end{bmatrix},3,2\right) \qquad \begin{bmatrix}2 & -1 & a\\0 & 0 & 33-3\cdot a\\17 & 0 & 6\cdot a+2\end{bmatrix}$

5/99

1.2

Man kann natürlich auch die Gleichung $r\,\mathbf{v1}+s\,\mathbf{v2}+t\,\mathbf{v3}=0$ als Gleichungssytem lösen mit den Möglichkeiten, die sich im Caculator−Fenster mit "Zeilenoperationen" für Matrizen ergeben.

Das ergibt dann **umgeformt** $\triangleright \begin{bmatrix}2 & -1 & a\\0 & 0 & 33-3\cdot a\\17 & 0 & 6\cdot a+2\end{bmatrix}$

Hier sieht man, $(33-3\,a)\cdot t=0 \triangleright (33-3\cdot a)\cdot t=0$ ergibt bei a=11 für t eine beliebige Lösung. Damit ergibt sich aus Zeile 3 eine Lösung, nämlich

$\text{solve}(17\,r+(6a+2)t=0,r) \triangleright r=\frac{-2\cdot(3\cdot a+1)\cdot t}{17}$

Aus der ersten Zeile folgt $\text{solve}\left(2\,\frac{-2\cdot(3\cdot a+1)\cdot t}{17}-s+a\,t=0,s\right) \triangleright s=\frac{(5\cdot a-4)\cdot t}{17}$

($a\neq 11$) hat r=0, t=0, s=0 zur Folge, Dann sind die Vektoren linear unabhängig.

1.3

$a=11$ hat t bel. $r=\frac{-2\cdot(3\cdot a+1)\cdot t}{17}|a=11 \triangleright r=-4\cdot t$ $s=\frac{(5\cdot a-4)\cdot t}{17}|a=11 \triangleright s=3\cdot t$ zur Folge.

Das heißt, dass die drei Vektoren linear abhänig sind.Mit t=1 folgt

$-4\cdot \mathbf{v1}+3\cdot \mathbf{v2}+\mathbf{v3} \triangleright \begin{bmatrix}a-11\\0\\0\end{bmatrix}$ $-4\cdot \mathbf{v1}+3\cdot \mathbf{v2}+\mathbf{v3}|a=11 \triangleright \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$

1.4

3 Vektoren mit Parameter

Lineare Abhängigkeit:

Gesucht ist a so, dass die Vektoren linear abhängig werden

$\mathbf{v1}:=\begin{bmatrix}a\\-3\\5\end{bmatrix} \triangleright \begin{bmatrix}a\\-3\\5\end{bmatrix}$ $\mathbf{v2}:=\begin{bmatrix}1\\-a\\2\end{bmatrix}$ $\mathbf{v3}:=\begin{bmatrix}-2\\-2\\2\cdot a\end{bmatrix} \triangleright \begin{bmatrix}-2\\-2\\2\cdot a\end{bmatrix}$

$\text{solve}(s\cdot \mathbf{v1}+r\cdot \mathbf{v2}+t\cdot \mathbf{v3}=0,\{s,r,t\}) \triangleright \text{false}$

$\mathbf{aa}:=\begin{bmatrix}a & 1 & -2\\-3 & -a & -2\\5 & 2 & 2\cdot a\end{bmatrix} \triangleright \begin{bmatrix}a & 1 & -2\\-3 & -a & -2\\5 & 2 & 2\cdot a\end{bmatrix}$

$\det(\mathbf{aa}) \triangleright -2\cdot(a^3-1)$ Nur wenn die Determinate verschwindet, kann es nichttriviale Lösungen geben. Bei Det≠0 wäre s=r=t=0 die einzig Lösung. Dann wären die Vektoren linear unabhängig. Man soll aber a so suchen, so dass die Vektoren linear abhängig sind. Also $\text{solve}(\det(\mathbf{aa})=0,a) \triangleright a=1$ (konnte man ja auch so sehen).

2.1

$\begin{bmatrix}a & 1 & -2\\2\cdot(a+2)\cdot(a^2-3) & 0 & -4\cdot(a+1)\cdot(a+2)\\-2\cdot(a+1)\cdot(2\cdot a-5) & 0 & 4\cdot(a+1)\cdot(a+2)\end{bmatrix}$

$\text{rowAdd}\left(\begin{bmatrix}a & 1 & -2\\2\cdot(a+2)\cdot(a^2-3) & 0 & -4\cdot(a+1)\cdot(a+2)\\-2\cdot(a+1)\cdot(2\cdot a-5) & 0 & 4\cdot(a+1)\cdot(a+2)\end{bmatrix},2,3\right)$

$\begin{bmatrix}a & 1 & -2\\2\cdot(a+2)\cdot(a^2-3) & 0 & -4\cdot(a+1)\cdot(a+2)\\2\cdot a^3-2 & 0 & 0\end{bmatrix}$

$umgeformt:=\begin{bmatrix}a & 1 & -2\\2\cdot(a+2)\cdot(a^2-3) & 0 & -4\cdot(a+1)\cdot(a+2)\\2\cdot a^3-2 & 0 & 0\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}a & 1 & -2\\2\cdot(a+2)\cdot(a^2-3) & 0 & -4\cdot(a+1)\cdot(a+2)\end{bmatrix}$

1/8

2.2

Man kann natürlich auch die Gleichung $r\,\mathbf{v1}+s\,\mathbf{v2}+t\,\mathbf{v3}=0$ als Gleichungssytem lösen mit den Möglichkeiten, die sich im Caculator−Fenster mit "Zeilenoperationen" für Matrizen ergeben.

Das ergibt dann **umgeformt** $\triangleright \begin{bmatrix}a & 1 & -2\\2\cdot(a+2)\cdot(a^2-3) & 0 & -4\cdot(a+1)\cdot(a+2)\\2\cdot a^3-2 & 0 & 0\end{bmatrix}$

Hier sieht man, $(2\,a^3-2)\cdot r=0 \triangleright (2\cdot a^3-2)\cdot r=0$ ergibt bei a=1 für r eine beliebige Lösung. Damit ergibt sich aus Zeile 2 eine Lösung, nämlich

$\text{solve}(2\cdot(a+2)\cdot(a^2-3)\,r-4\cdot(a+1)\cdot(a+2)\,t=0,t) \triangleright t=\frac{(a^2-3)\cdot r}{2\cdot(a+1)}$ or $a=-2$ zu a=−2 siehe unten

Aus der ersten Zeile folgt $\text{solve}\left(r\,a+s+(-2)\,\frac{(a^2-3)\cdot r}{2\cdot(a+1)}=0,s\right) \triangleright s=\frac{-(a+3)\cdot r}{a+1}$

($a\neq 1$) hat r=0, t=0, s=0 zur Folge, Dann sind die Vektoren linear unabhängig.

2.3

$a=1$ hat r bel. $t=\frac{(a^2-3)\cdot r}{2\cdot(a+1)}|a=1 \triangleright t=\frac{-r}{2}$ $s=\frac{-(a+3)\cdot r}{a+1}|a=1 \triangleright s=-2\cdot r$ zur Folge.

Das heißt, dass die drei Vektoren linear abhänig sind.Mit r=1 folgt

$\mathbf{v1}-2\cdot \mathbf{v2}-\frac{1}{2}\cdot \mathbf{v3} \triangleright \begin{bmatrix}a-1\\2\cdot a-2\\1-a\end{bmatrix}$ $\mathbf{v1}-2\cdot \mathbf{v2}-\frac{1}{2}\cdot \mathbf{v3}|a=1 \triangleright \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$

Zunächst scheint es noch eine weitere Möglichkeit zu geben:

$a=-2$ hat r=0, t beliebig aus Zeile 2 und s=2 t aus Zeile 1 zur Folge.

$0\cdot \mathbf{v1}+2\cdot \mathbf{v2}+\mathbf{v3} \triangleright \begin{bmatrix}0\\-2\cdot a-2\\2\cdot a+4\end{bmatrix}$ $0\cdot \mathbf{v1}+2\cdot \mathbf{v2}+\mathbf{v3}|a=-2 \triangleright \begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix}$ $\det(\mathbf{aa}|a=-2) \triangleright 18$

Also ist das doch keine Lösung. Beim Berechnen ist nämlich mit (2 a +4) multipliziert worden und das ist für a=−2 nicht erlaubt.

2.4