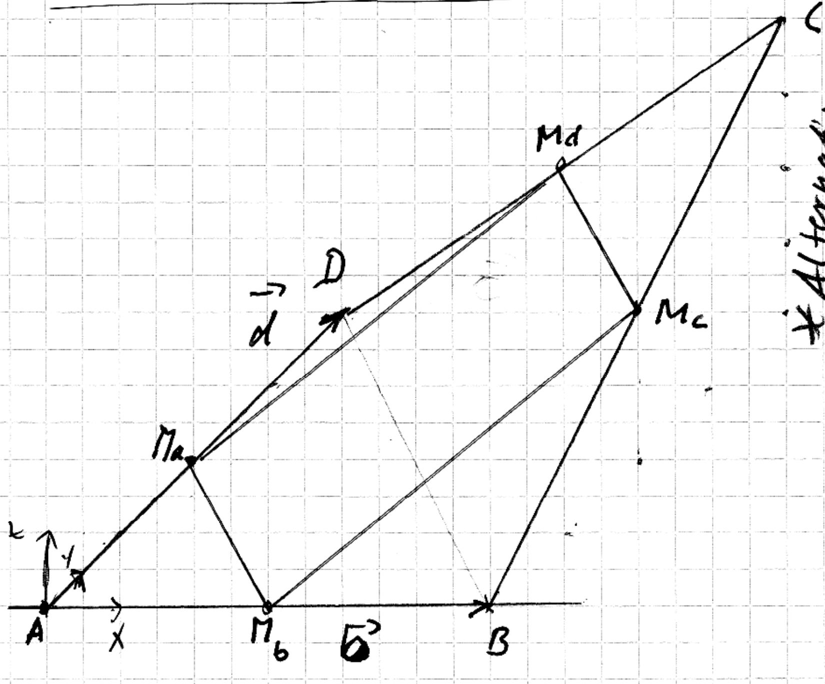
Aufgabe 3 Gk 15.3.98

Zeigen Sie, dass das Viereck, das durch Verbindung benachbarter Seitenmitten eines beliebigen Vierecks entsteht, immer ein Parallelogramm ist.

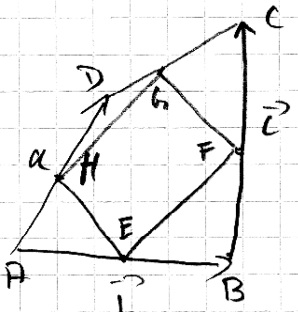
Bestimmen Sie die Innenwinkel des Parallelogramms, wenn das Viereck folgende Ecken hat:

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$;

Zeichnen Sie dieses Viereck und das Mittenparallelogramm in einem 3D-Koodinatensystem.



* Alternativ



$\vec{EF} = -\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$

$\vec{HG} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}(-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$

$\vec{HE} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$

$\vec{GF} = +\frac{1}{2}(-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) - \frac{1}{2}\vec{c} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$

q.e.d.

*

$\vec{M_b M_c} = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}(\vec{c}-\vec{b}) = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{c}$

$\vec{M_a M_d} = \frac{1}{2}\vec{d} + \frac{1}{2}(\vec{c}-\vec{d}) = \frac{1}{2}\vec{c}$

} gleichlang und parallel.

Damit ist schon $M_b M_c M_d M_a$ ein Parallelogramm.

Probe: $\vec{M_b M_a} = -\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{d}$ $\quad$ $\vec{M_c M} = \frac{1}{2}(\vec{c}-\vec{b}) + \frac{1}{2}(\vec{d}-\vec{c}) = -\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{d}$ q.e.d.

hier $\vec{M_b M_c} = \frac{1}{2}\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\vec{M_b M_a} = -\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ +4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = -9+16 = 7 = \sqrt{9+16+2}\,\sqrt{9+16}\,\cos\alpha$

$= \sqrt{27} \cdot 5 \cdot \cos\alpha$

$\cos\alpha = \frac{7}{\sqrt{27} \cdot 5} = 0{,}2694$

$\alpha = 74{,}37°$

$\beta = 180° - \alpha = 105{,}63°$ | denn die Winkelsumme im Viereck ist 360°

Und α und β kommen je 2-mal vor.