Aufgabe 2

GK 15.3.98

$$g:\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad h:\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad k:\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 15 \\ 18 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie den Schnittpunkt von g und h.

$$E:\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

b) Zeigen Sie, dass E von g und h aufgespannt wird.

Berechnen Sie die den Schnitt $E \cap k$.

$g \cap h \quad \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$

① $3s + 2t = 7$
② $s + 3t = 0 \Rightarrow s = -3t$ $\quad -9t + 2t = 7$
③ $-4s - 5t = -7$ $\quad -7t = 7 \Rightarrow t = -1$, $s = +3$

Prüfung in ③ $-12 + 5 = -7$ w.A.

Schnittpkt g: $\vec{s} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+9 \\ 2+3 \\ 6-12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$

Probe in h: $\vec{s} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+2 \\ 2+3 \\ -1-5 \end{pmatrix}$ o.k.

b) Der Aufpunkt von E ist der eben ausgerechnete Schnittpunkt. Der 1. Richtungsvektor von E ist der von g, also liegt g in E. Der 2. Richtungsvektor von E ist das Negative des Ri. von h, also liegt auch h in E. Damit spannen g und h E auf.

$E \cap k: \begin{pmatrix} 15 \\ 18 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$

① $4t - 3r - 2s = -9$
② $4t - r - 3s = -13$
③ $7t + 4r + 5s = -8$

① − 3② = ④ $\quad -8t + 7s = +30$
4② + ③ = ⑤ $\quad 23t - 7s = -60$

$15t = -30$
$t = -2$

in ④ $\quad +16 + 7s = 30$
$7s = 14$
$s = 2$

in ② $\quad r = 4t - 3s + 13 =$
$r = -8 - 6 + 13 = -1$

k schneidet E in

$\vec{s_k} = \begin{pmatrix} 15 \\ 18 \\ 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ -12 \end{pmatrix}$

Probe in E

$\vec{s_k} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ -12 \end{pmatrix}$ ok.

c) Liegt der Punkt A(3 / 4 / -2) auf g? Geben Sie die Gleichung einer Geraden f an, die durch A verläuft und parallel zu h ist.

$A \in g?$ $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} 6 = 3s \\ 2 = s \\ -8 = -4s \end{matrix} \quad \begin{matrix} \Rightarrow s = 2 \\ s = 2 \\ s = 2 \end{matrix}$ ja, $A \in g$

$f: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$

d) Wie liegt f zu E? Wie liegen g und f , bzw. h und k zueinander? (Möglichst wenig Rechnung.)

$A \in g,\ h \subseteq E,\ f \parallel h,\ g \subseteq E \Rightarrow f \subseteq E$

$g \cap f = A \quad k \cap E = \vec{S_k}$ ist $\vec{S_k}$ auf h?

$\begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} 5 = -2s \\ 7 = -3s \\ -11 = 5s \end{matrix}\right\}$ alles verschieden,

Damit trifft k die Ebene E nicht in h, also h und k windschief.

e) Zeigen Sie , dass $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ auf der Ebene E senkrecht steht.

$\vec{n} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = 3 + 1 - 4 = 0$

$n \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} = 2 + 3 - 5 = 0$

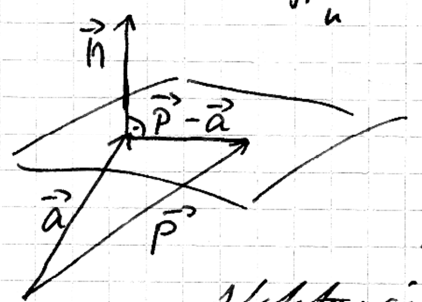
$\vec{n}$ steht auf beiden Richtungsvektoren senkrecht, also auch auf E.

f) Mathix behauptet, auch x+y+z=5 sei eine Gleichung für die Ebene E. Prüfen Sie das für drei Ebenenpunkte. Als Begründung führt Mathix die Gleichung $\vec{n} \cdot (\vec{p} - \vec{a}) = 0$ an, mit dem beliebigen Ebenenpunkt $\vec{p}$ und dem Aufpunkt $\vec{a}$. ☺ Erläutern Sie mit Worten und Skizze, dass er Recht hat.

Aufpunkt $\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$ $\quad 6 + 5 - 6 = 5$ wahre Aussage

Aufpunkt von g (auf E) $\quad -3 + 2 + 6 = 5$ w.A

" " h (" E) $\quad 4 + 2 - 1 = 5$ w.A.



Die Gleichung bedeutet dass $\vec{n}$ auf $(\vec{p} - \vec{a})$ senkrecht steht. Da $\vec{p} - \vec{a}$ aber ein Vektor ist, der sicher in der Ebene liegt und $\vec{n}$ auf allen Vektoren der Ebene senkrecht steht, kann die Ebene dadurch beschrieben werden: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-6 \\ y-5 \\ z+6 \end{pmatrix} = x - 6 + y - 5 + z + 6 = 0$

$\Leftrightarrow x + y + z = 5$ qed.