

Ebene schneidet Gerade

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Universität Lüneburg, 24. Oktober 2005

$$\text{Gerade } g: \vec{p}_g = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{Ebene } E: \vec{p}_E = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Schnitt Ansatz: } \vec{p}_E = \vec{p}_g \text{ also } \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Diese Vektorgleichung kann als Gleichungssystem mit drei Variablen geschrieben werden, indem man „etagenweise“ drei lineare Gleichungen schreibt.

Im Hochschulzusammenhang werden lineare Gleichungssysteme mit dem Gauß-Algorithmus gelöst. Das bewährt sich m.E. im Schulzusammenhang nicht- und ist auch unverhältnismäßig schwierig in Klausuren zu korrigieren. Meist wird dann nämlich nur das Endergebnis gesehen und nicht gewürdigt, ob der Lernende verständnisgeleitet vorgeht.

Daher sei hier „von Hand“ vorgerechnet:

$$\begin{array}{l} \textcircled{1} \quad 2r + s + 2t = 0 - 2 = -2 \\ \textcircled{2} \quad 2r - s + t = -3 - 0 = -3 \\ \textcircled{3} \quad -r - s = -3 + 1 = -2 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} 3 \text{ Gl., } 3 \text{ Unbek.} \\ \\ \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} t \text{ eliminieren} \\ \textcircled{1} - 2 \cdot \textcircled{2} = \textcircled{4} \quad -2r + 3s = -2 - 2(-3) = 4 \\ \textcircled{3} \quad -r - s = -2 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} 2 \text{ Gl., } 2 \text{ Unbek.} \\ \\ \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} r \text{ eliminieren} \\ \textcircled{4} - 2 \cdot \textcircled{3} = \textcircled{5} \quad 5s = 8 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} 1 \text{ Gl., } 1 \text{ Unbek.} \\ \\ \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} \textcircled{5} \text{ in } \textcircled{3} = \textcircled{6} \quad -r - \frac{8}{5} = -2 \Rightarrow r = \frac{2}{5} \\ \textcircled{5}, \textcircled{6} \text{ in } \textcircled{2} \quad t = -3 - 2r + s = -3 - \frac{4}{5} + \frac{8}{5} \\ t = -3 + \frac{4}{5} = -\frac{11}{5} \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \text{rückwärts} \\ \text{einsetzen} \end{array} \right.$$

Schnittpunkt existiert, da es genau eine Lösung gibt. In g :

$$\vec{s}_g = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} - \frac{11}{5} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 + 22 \\ -15 + 11 \\ -15 + 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 22 \\ -4 \\ -15 \end{pmatrix} \quad \leftarrow \text{Probe}$$

$$\text{Probe in } E: \vec{s}_E = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{8}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 10 + 4 + 8 \\ +4 - 8 \\ -5 - 2 - 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 22 \\ -4 \\ -15 \end{pmatrix} \quad \leftarrow \text{OK.}$$

Geht man auf diese Weise systematisch vor, so ist es auch nicht schwer, die beiden Sonderfälle zu erkennen. Außer dass ein Schnittpunkt existiert wie hier, kann die Gerade parallel zur Ebene sein oder in der Ebene liegen.

Bei Parallelität erhält man einen Widerspruch von der „Bauart“ $0=7$. Lernende glauben dann gerne, sie hätten alles falsch. Man muss betonen, dass nun eine völlig richtige Antwort folgt. Wenn eine Variabel sich nicht bestimmen lässt, ist die gegebene Gerade die Lösungsmenge. Hat man z.B. die „Bauart“ $r=3s+2$, $t=-s+5$, setzt man zur Probe die beiden Terme in die Ebenengleichung b.z.w. die Geradengleichung ein und erhält dieselbe Gerade, die gegebene Gerade in anderer Gestalt. Diese Proben-Geradengleichung ist vom Rechenweg abhängig!!!!