Ebene schneidet Ebene

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Universität Lüneburg, 24. Oktober 2005

Ebene 1 $E_1:\ \vec{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ Ebene $E_2:\ \vec{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Schnitt Ansatz: $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Diese Vektorgleichung kann als Gleichungssystem mit drei Gleichungen aber vier Variablen geschrieben werden, indem man „etagenweise“ drei lineare Gleichungen schreibt.
Was kann man erwarten? Zwei Ebenen schneiden sich in einer Gerade, der üblichs Fall. Dann muss eine der Variablen „drinbleiben“. Welche das ist, richtet sich (meist) nach dem Rechenweg. Die beiden Ebenen könnten parallel sein, das erkennt man wieder an einem Widerspruch. Fallen die Ebenen zusammen, sind es also gar keine zwei Ebenen, so erkennt man das daran, dass sich zwei Variablen nicht bestimmen lassen. Die Aufgaben sind dann von ihrem Autor „rückwärts augezäumt“. Man kann diese beiden Sonderfälle oft „mit bloßem Auge“ daran sehen, dass sich beide Richtungvektoren der einen Ebene als Linearkombination der Richtungsvektoeren der anderen Ebene darstellen lassen. Wenn das auch für die Differenz der beiden Ortsvektoren gilt, fallen die Ebenen zusamme, sonst sind sie parallel. In einem guten Unterricht werden diese „Statements“ mit den Schülern erarbeitet und sie werden ermuntert selbst solche „durchsichtigen“ Fälle zu konstruieren.
Für das eigentliche Rechnen mit Gleichungssystemen sind Werkzeuge (CAS-Rechner, CAS am PC, auch bessere GTR) höchst sinnvoll.
Der Vollständigkeit halber soll Obiges hier von Hand gelöst werden:

(1) $2 + 2r + s = 0 - 2t + u$
(2) $2r - s = -3 - t - 2u$
(3) $-1 - r - s = -3 + 3u$

(1) $2r + s + 2t - u = -2$
(2) $2r - s + t + 2u = -3$
(3) $-r - s - 3u = -2$

|| 3 Gl

S eliminieren (als Alternative zur vorigen Seite.

(1)+(2)=(4) $4r + 3t + u = -5$
(1)+(3)=(5) $r + 2t - 4u = -4$

|| → 2 Gl

r elim.

(4) − 4(5)=(6) $-5t + 17u = 11$

|| 1 Gl.

U bleibt drin, das vermeidet 17-tel

(6') $t = \frac{17}{5}u - \frac{11}{5}$ ⇒ in E_2

Lösungsgerade:

$\vec{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} + \left(\frac{17}{5}u - \frac{11}{5}\right)\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\vec{p} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 22 \\ -4 \\ -15 \end{pmatrix} + \frac{u}{5}\begin{pmatrix} -5 \\ 28 \\ 17 \end{pmatrix} + \frac{u}{5}\begin{pmatrix} 5 \\ -10 \\ 15 \end{pmatrix}$

$\vec{p} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 22 \\ -4 \\ -15 \end{pmatrix} - \frac{u}{5}\begin{pmatrix} 0 \\ 18 \\ 32 \end{pmatrix}$

Mit Mühe kann man nun noch r und s als Terme in Abhängigkeit von u ausdrücken und diese dann in E2 einsetzen. Dann muss, falls man sich immernoch nicht verrechnet hat, die hier rechts stehende Gleichung für die Lösungsgerade herauskommen.
Einen Zuwachs an mathematischer Erkenntnis bringt das nicht.
Auch gewinnt man als „Beurteilender“ keine weiteren Erkenntnisse über das mathematische Vermögen des Prüflings.