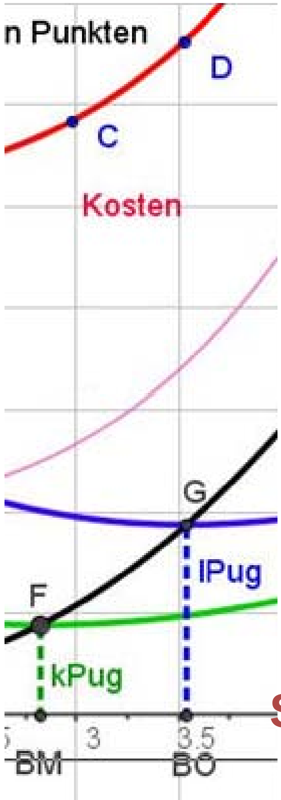
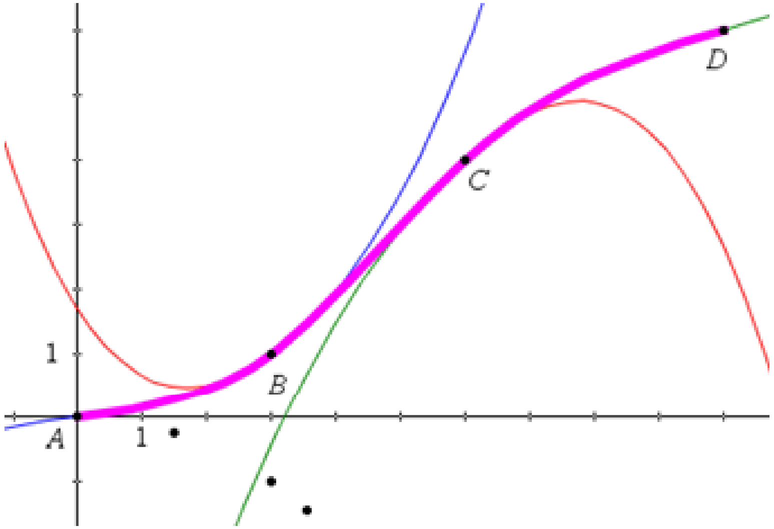
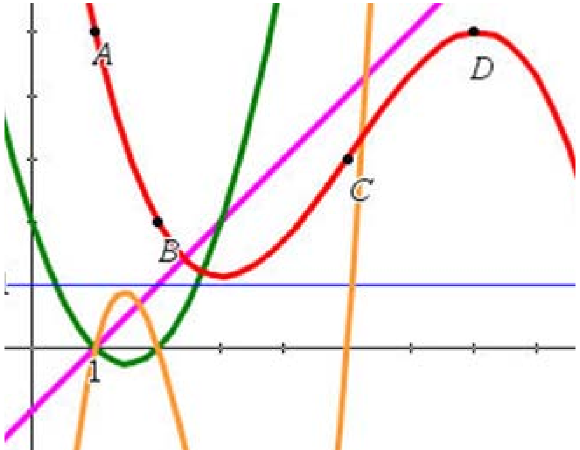
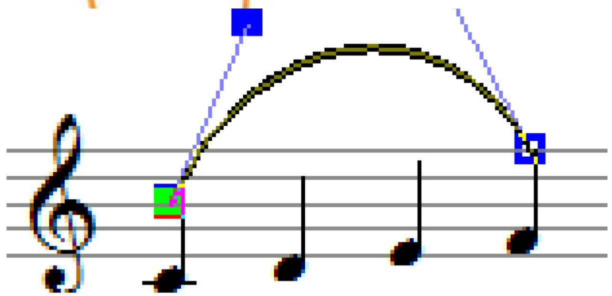
LEUPHANA
UNIVERSITÄT LÜNEBURG

Vielfältige Anwendungen des Begriffs „Basis“ in Vektorräumen









khdm –Tagung
Mathematik im Übergang
Schule-Hochschule und 1. Studienjahr
Paderborn 22. 2. 2013

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, www.mathematik-verstehen.de, Folie 0

CURRICULUM VITAE

1966 Abitur in Hameln

TU Clausthal, Studium

1971 1. Staatsex. Gym. LA Mathe/Physik

1972 Diplom Mathematik

1975 Promotion Mathematik (Algbra,Halbringe)

2. Staatsex. Gym. LA Mathe/Physik

Johanneum Lüneburg 2002

1991 Ingenieur-Mathematik

FH dann Leuphana 2008

1993 Lehrerbildung

Fachgymnasium Mathematik

Uni Lüneburg Leuphana 2013

2007 Mathematik für alle Leuphana

30 Jahre XXX

20 Jahre XX

Fazit

Mathematik verstehen

“Die Basis verstehen ist Basis zum Verstehen”

Vorbemerkungen

khd m
kompetenzzentrum
hochschuldidaktik
mathematik

Querschnittsarbeitsgruppen

QAG1 Methoden und Instrumente empirischer Lehr-Lern-Forschung

QAG2 Fachdidaktische Analyse und Aufbereitung mathematischen Wissens

QAG3 Hochschuldidaktische Lehr-Lernmethoden

QAG4 eLearning und **digitale Medien in der mathematischen Hochschulausbildung**

Einordnung

Veranstaltung: **Lineare Algebra** oder: **Grundelemente der Höheren Mathematik**

vorausgegangen: Vektorraum , Linear unabhängig, Basis

übliche Beispiele für Vektorräume, darunter VR(n) der Polynome bis zum Grad n mit der Standardbasis $\left\{1, x, x^2, \ldots, x^n\right\}$.

Nun gleich anschießend zur „Bereicherung“:

was nun folgt:

“Die Basis verstehen ist Basis zum Verstehen”

Vorbemerkungen

Mein Hintergrund und mein Beitrag zur „Stoffdidaktik“

Interpolation

Lagrange- und Newton-Interpolation
Wirtschaftsanwendung

Basen angepasst an Datenpunkte

Splines

Kubische Splines
Schiffbau-Beispiel
Bézier-Splines
Design

Jedem Polynom seine Basis angepasst an einen Datenpunkt

Bernsteinpolynome

Differenzialgleichungen

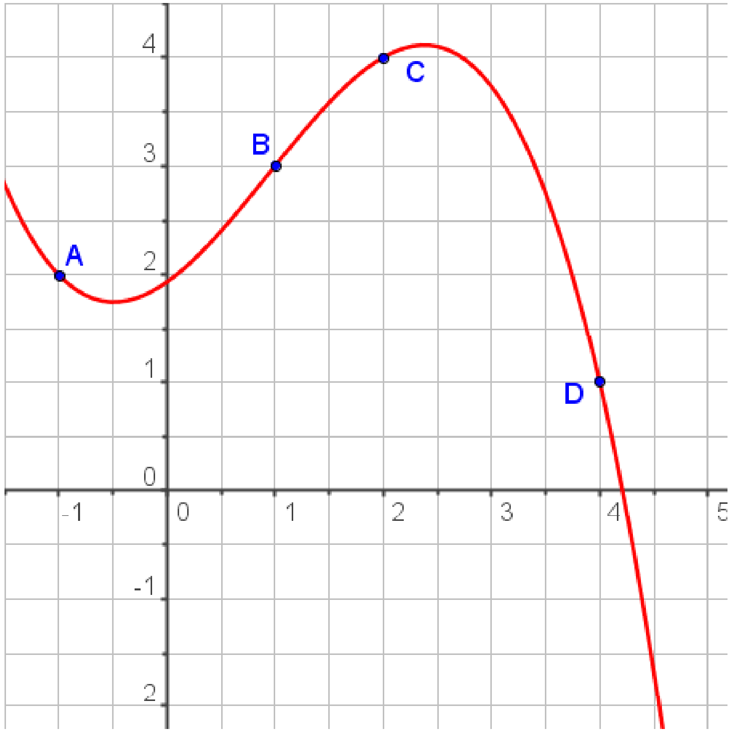
DGL mit konstanten Koeffizienten

VR der Störfunktion

Fazit

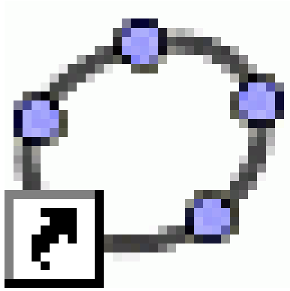
Polynombasis nach Lagrange

Datenpunkte



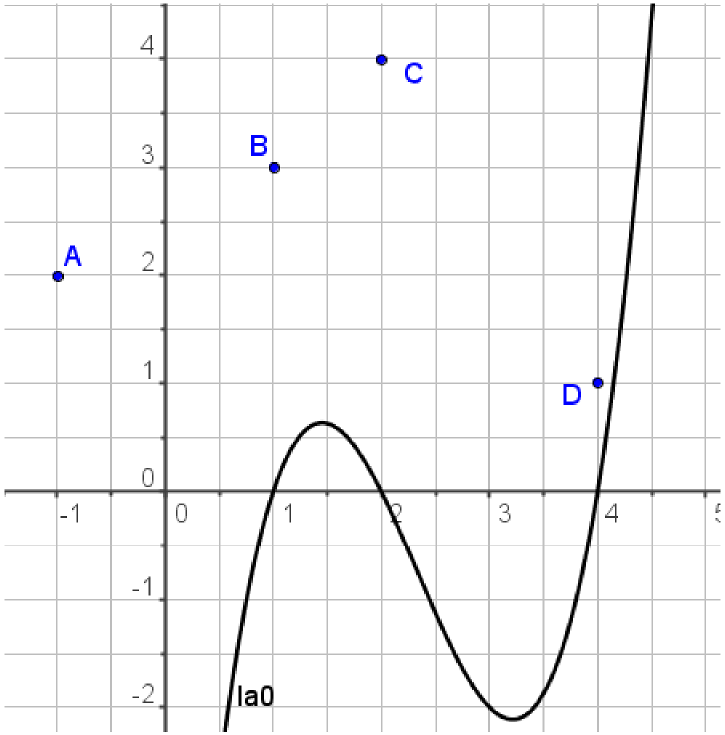
Gegeben sind Datenpunkte

Gesucht ist das Interpolationspolynom



Polynombasis nach Lagrange

Datenpunkte



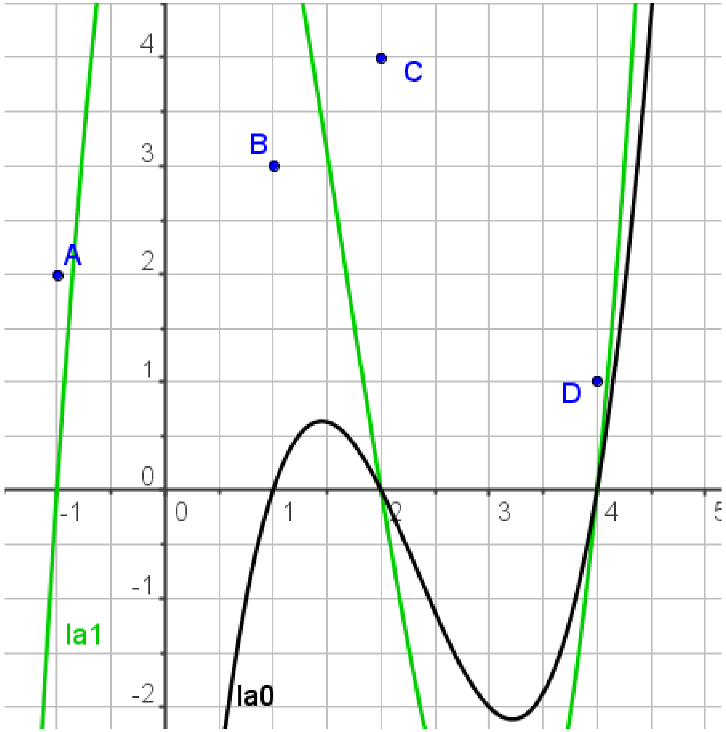
1. Basispolynom

$$L_1(x) = (x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$$

Gesucht ist das Interpolationspolynom

Polynombasis nach Lagrange

Datenpunkte



1. Basispolynom

$$L_1(x) = (x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$$

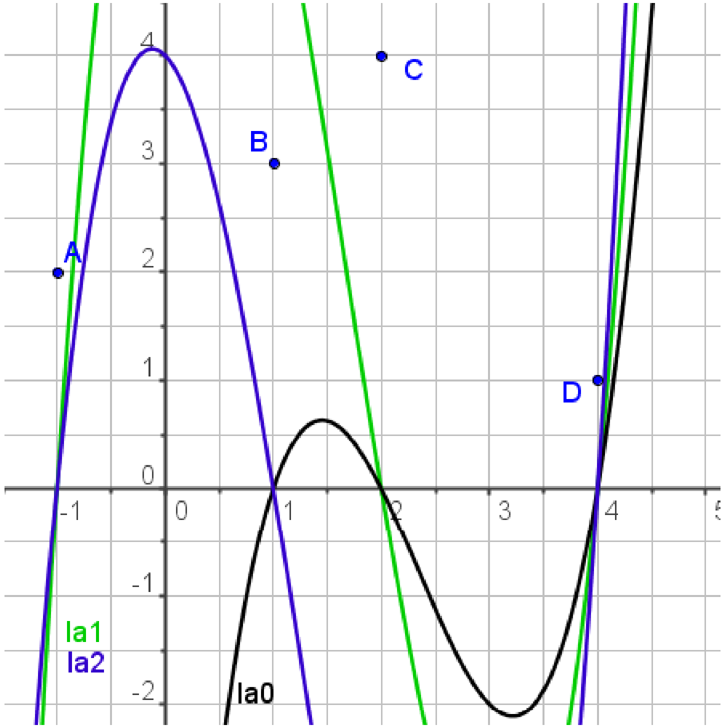
2. Basispolynom

$$L_2(x) = (x - x_1)(x - x_3)(x - x_4)$$

Gesucht ist das Interpolationspolynom

Polynombasis nach Lagrange

Datenpunkte



1. 2. und 3. Basispolynom

$$L_1(x) = (x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$$

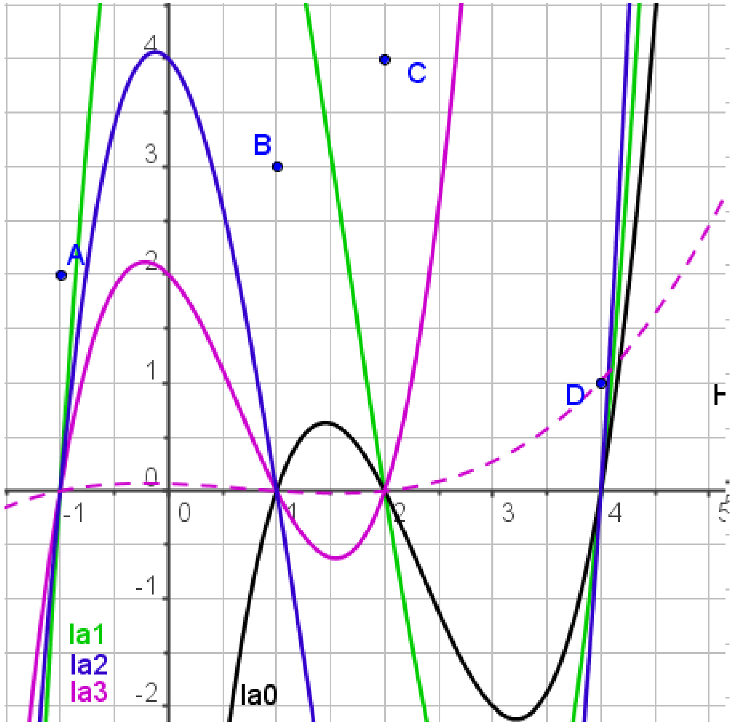
$$L_2(x) = (x - x_1)(x - x_3)(x - x_4)$$

$$L_3(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_4)$$

Gesucht ist das Interpolationspolynom

Polynombasis nach Lagrange

Datenpunkte



1. 2. 3. und 4. Basispolynom

$$L_1(x) = (x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$$

$$L_2(x) = (x - x_1)(x - x_3)(x - x_4)$$

$$L_3(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_4)$$

$$L_4(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

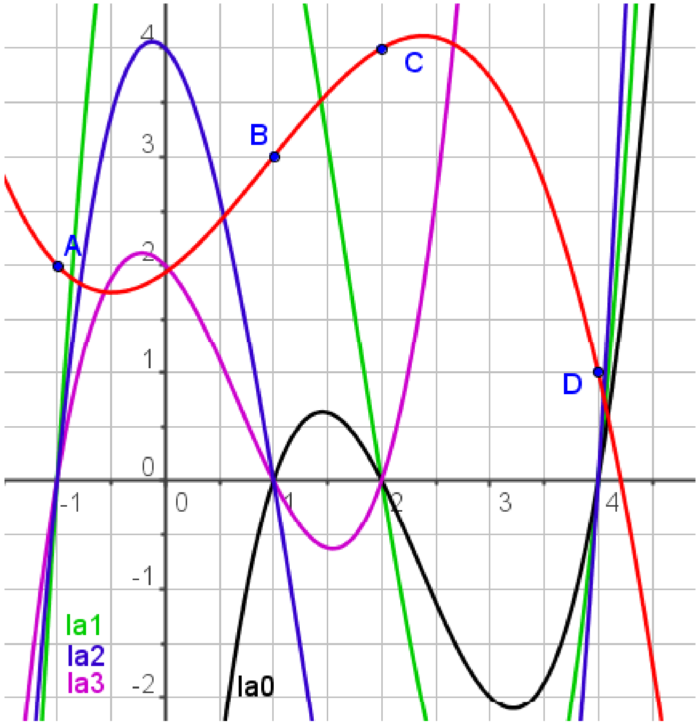
Die Lagrange-Basispolynome sind linear unabhängig.

Der Vektorraum der Polynome bis zum 3. Grad hat die Dimension 4.

Sie werden nun so gestreckt, dass sie den Stützpunkt erreichen, an dessen Abszisse sie keine Nullstelle haben.

Polynombasis nach Lagrange

Datenpunkte



1. 2. 3. und 4. Basispolynom

$$L_1(x) = (x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$$

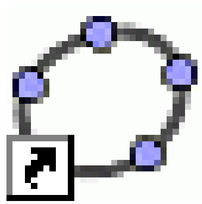
$$L_2(x) = (x - x_1)(x - x_3)(x - x_4)$$

$$L_3(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_4)$$

$$L_4(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

Und daraus entsteht das

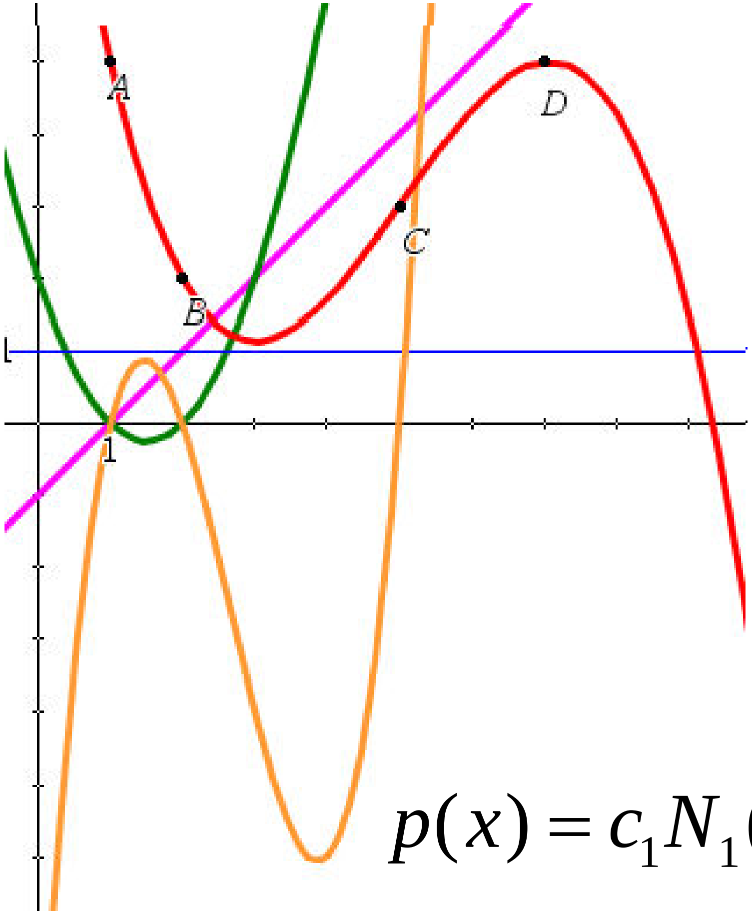
Interpolationspolynom
als Linearkombination



$$p(x) = c_1 L_1(x) + c_2 L_2(x) + c_3 L_3(x) + c_4 L_4(x)$$

Polynombasis nach Newton

Datenpunkte



$$N_1(x) = 1$$

$$N_2(x) = (x - x_1)$$

$$N_3(x) = (x - x_1)(x - x_2)$$

$$N_4(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

Sie sind linear unabhängig.

Damit sind sie eine Basis.

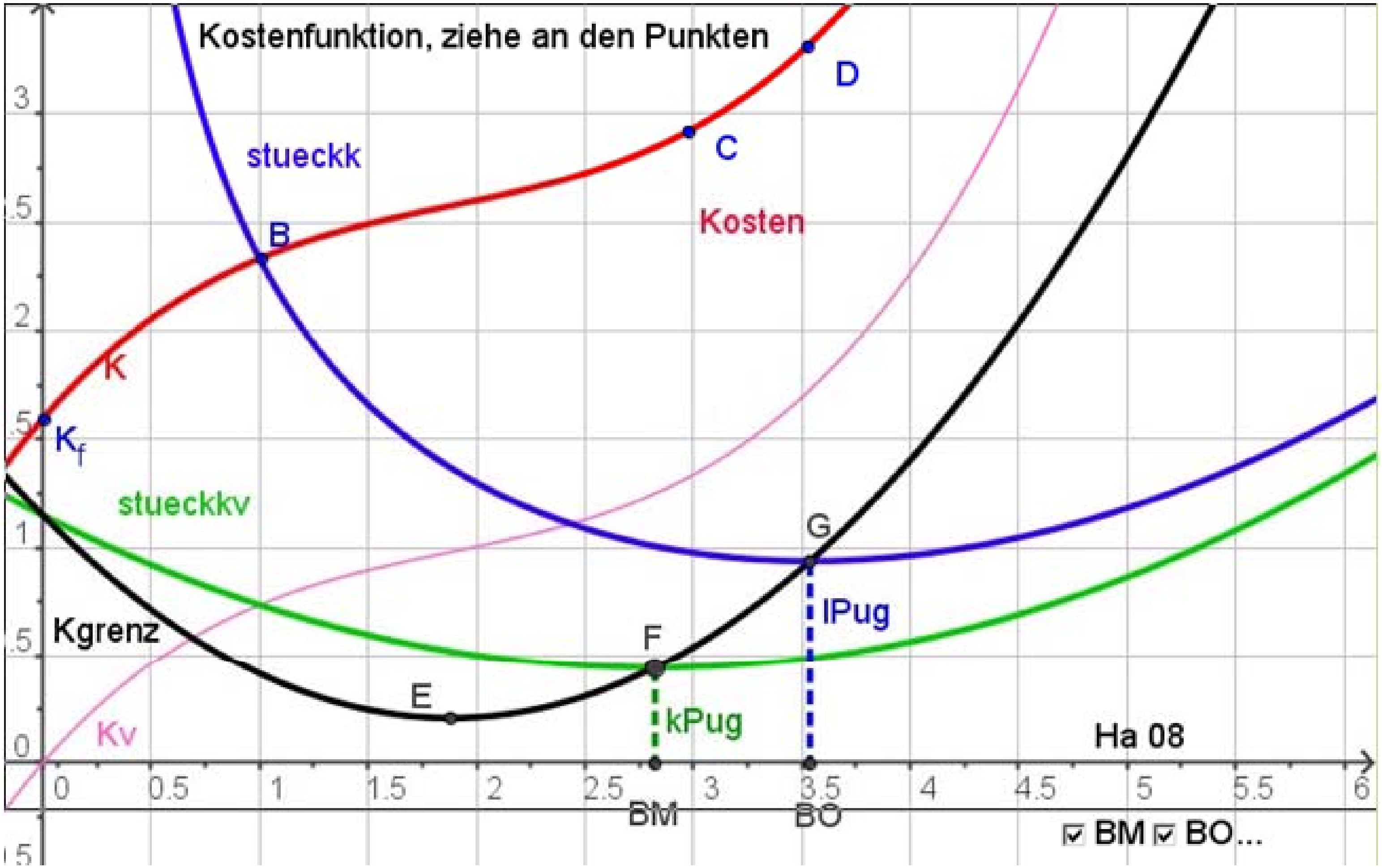
Und daraus entsteht das Interpolationspolynom

als Linearkombination

$$p(x) = c_1 N_1(x) + c_2 N_2(x) + c_3 N_3(x) + c_4 N_4(x)$$

Wirtschaftsfunktionen

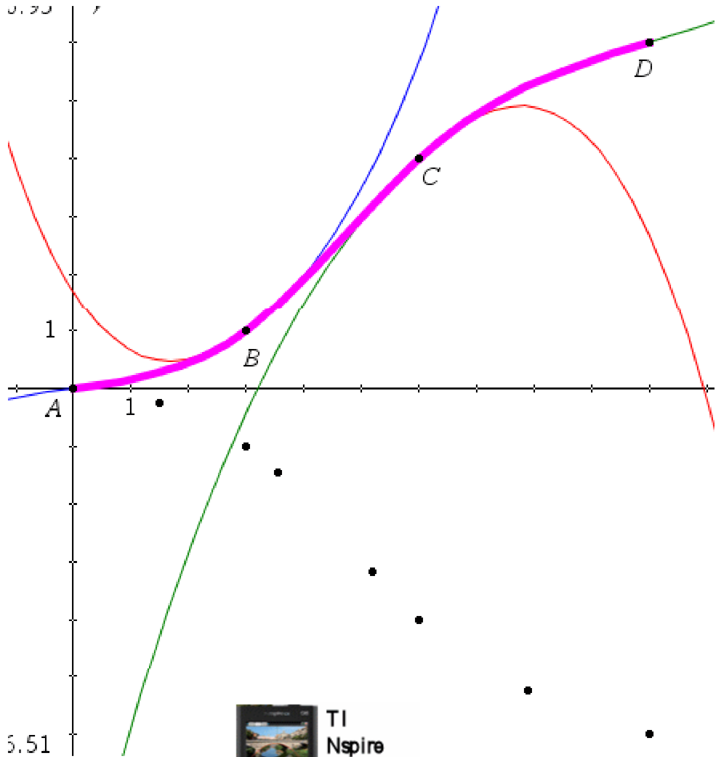
Modellierung der Kostenfunktion



!!!!!!!!!!!
Welch
kleine
Variation
von D,…
so viel
für die
Interpretation
bewirkt.
!!!!!!!

Splines

Modellierung im Design



Kubische Splines

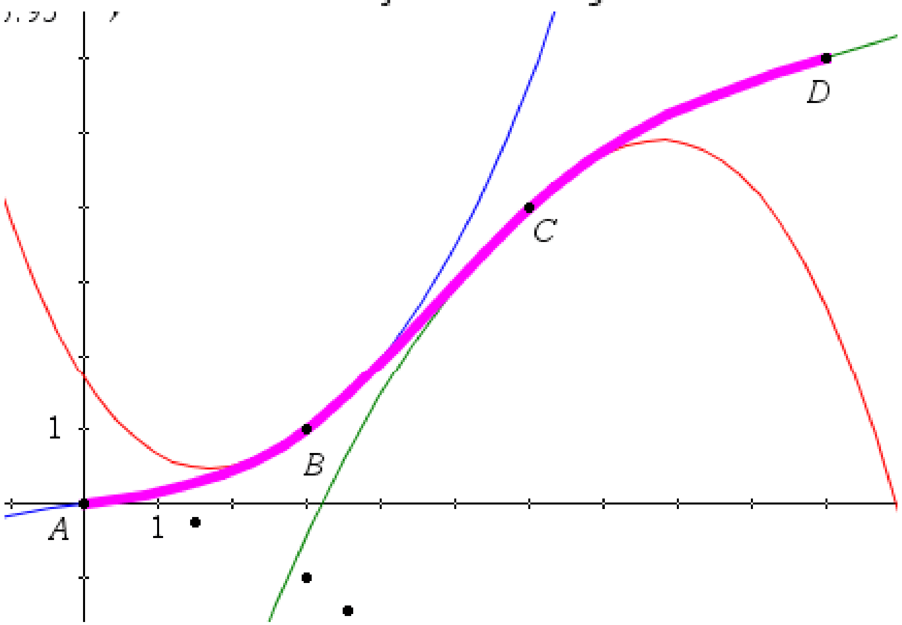
Modellierung im Design

$p0(x):=apy+b0\cdot(x-apx)+c0\cdot(x-apx)^2+d0\cdot(x-apx)^3$ ▸ *Fertig* Durch (apx, apy)

$p1(x):=bpy+b1\cdot(x-bpx)+c1\cdot(x-bpx)^2+d1\cdot(x-bpx)^3$ ▸ *Fertig* Durch (bpx, bpy)

$p2(x):=cpy+b2\cdot(x-cpx)+c2\cdot(x-cpx)^2+d2\cdot(x-cpx)^3$ ▸ *Fertig* Durch (cpx, cpy)

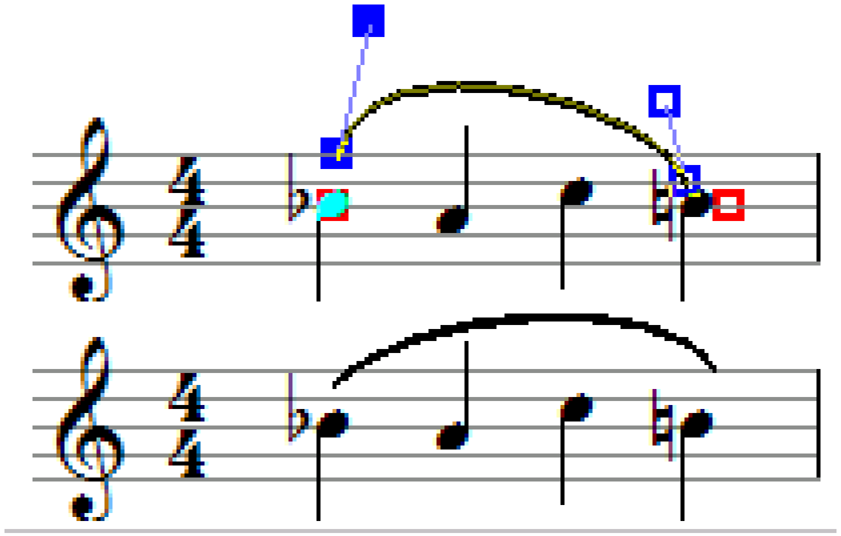
Damit erreicht jedes Polynom seinen "Startnagel". Gegeben sind n+1 Punkte.

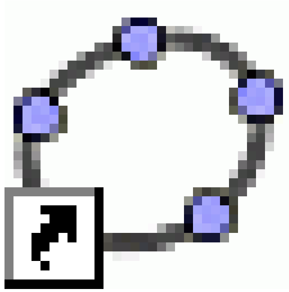


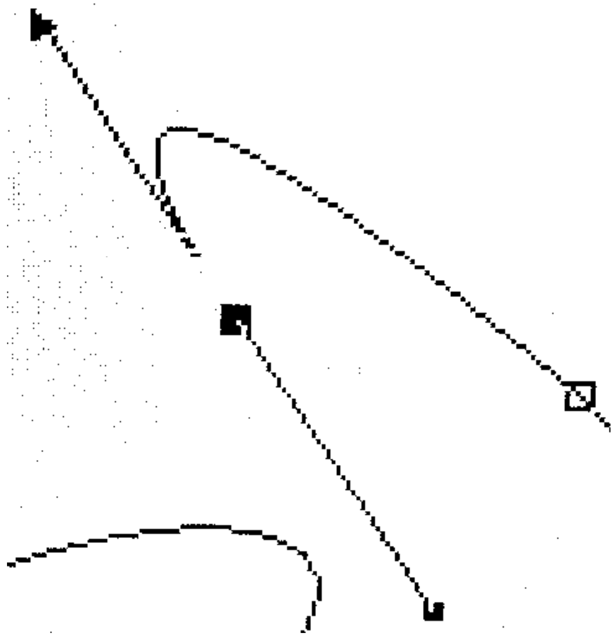
Jedes der n Polynome wird in einer **eigenen Basis** dargestellt, die an das **Problem angepasst** ist.
Das ermöglicht eine übersichtliche Formulierung der Bedingungen:
An den Nägeln sind Werte, Steigungen und Krümmungen gleich.

Bézier-Splines

Datenpunkte und Steuerpunkte



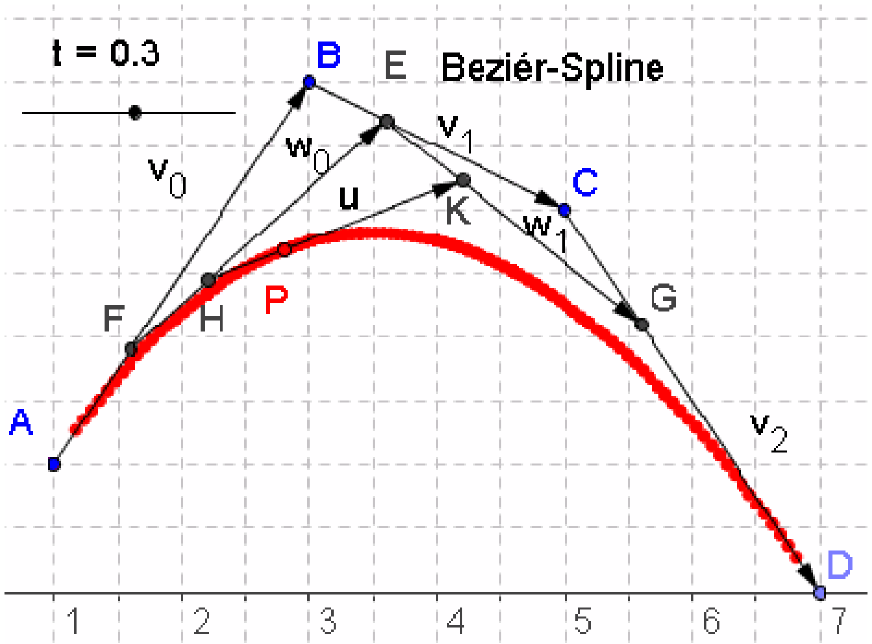




- Notenbogen in Capella
- Kurvenwerkzeug im Malprogramm
- Hilfsmittel der Schriftdesigner
- ....

Bézier-Splines

Datenpunkte und Steuerpunkte



Teilungspunkt stets an der t-Stelle des Vektors.

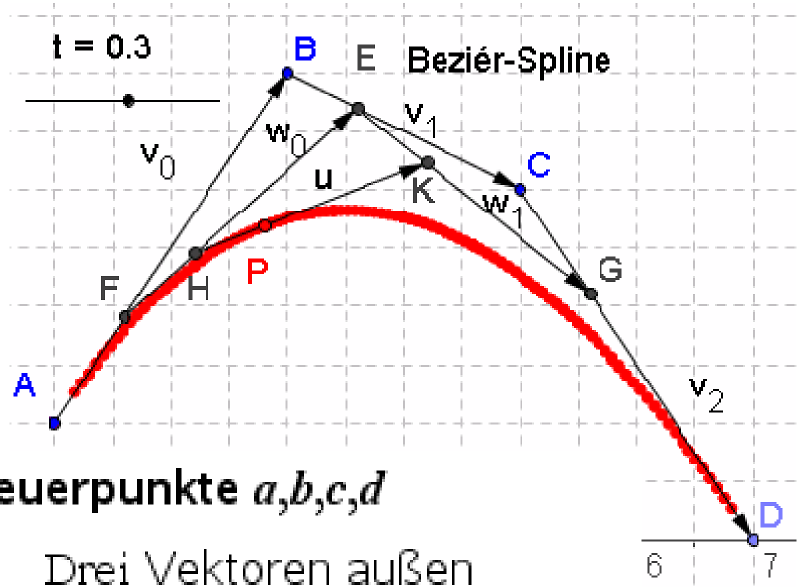
t läuft von 0 bis 1.

Der Ort von P ist der Bézier-Spline

Beweis mit einem vektoriellen Ansatz

Bézier-Splines

.....Beweis



Bézier–Spline ,vektorielle Konstruktion: 4 Steuerpunkte a,b,c,d

$\mathbf{v0}:=b-a \blacktriangleright b-a \quad \mathbf{v1}:=c-b \blacktriangleright c-b \quad \mathbf{v2}:=d-c \blacktriangleright d-c$ Drei Vektoren außen

drei Punkte f, e g auf den t–Teilungsstellen

$\mathbf{f}:=a+t\cdot \mathbf{v0} \blacktriangleright (b-a)\cdot t+a \quad \mathbf{e}:=b+t\cdot \mathbf{v1} \blacktriangleright (c-b)\cdot t+b \quad \mathbf{g}:=c+t\cdot \mathbf{v2} \blacktriangleright (d-c)\cdot t+c$

$\mathbf{w0}:=\mathbf{e}-\mathbf{f} \blacktriangleright (a-2\cdot b+c)\cdot t-a+b \quad \mathbf{w1}:=\mathbf{g}-\mathbf{e} \blacktriangleright (b-2\cdot c+d)\cdot t-b+c$ dann zwei Vektoren

zwei Punkte k und h auf den t–Teilungsstellen

TI Nspire CX CAS

$\mathbf{h}:=\mathbf{f}+t\cdot \mathbf{w0} \blacktriangleright (a-2\cdot b+c)\cdot t^2-2\cdot (a-b)\cdot t+a \quad \mathbf{k}:=\mathbf{e}+t\cdot \mathbf{w1} \blacktriangleright (b-2\cdot c+d)\cdot t^2-2\cdot (b-c)\cdot t+b$

$\mathbf{u}:=\mathbf{k}-\mathbf{h} \blacktriangleright (-a+3\cdot b-3\cdot c+d)\cdot t^2+(2\cdot a-4\cdot b+2\cdot c)\cdot t-a+b$ dann ein letzter Vektor

ein Punkt p auf der t–Teilungsstelle

$\mathbf{p}:=\mathbf{h}+t\cdot \mathbf{u} \blacktriangleright -(a-3\cdot b+3\cdot c-d)\cdot t^3+3\cdot (a-2\cdot b+c)\cdot t^2-3\cdot (a-b)\cdot t+a$

Vektorgleichung, sortieren nach Punkten a,b,c,d

Bézier-Splines

mit Bernsteinpolynomen

bern0(t):=factor$(\mathbf{p}|a=1$ and $b=0$ and $c=0$ and $d=0)$ ▸ *Fertig* **bern0**(t) ▸ $-(t-1)^3$

bern1(t):=factor$(\mathbf{p}|a=0$ and $b=1$ and $c=0$ and $d=0)$ ▸ *Fertig* **bern1**(t) ▸ $3\cdot t\cdot (t-1)^2$

bern2(t):=factor$(\mathbf{p}|a=0$ and $b=0$ and $c=1$ and $d=0)$ ▸ *Fertig* **bern2**(t) ▸ $-3\cdot t^2\cdot (t-1)$

bern3(t):=factor$(\mathbf{p}|a=0$ and $b=0$ and $c=0$ and $d=1)$ ▸ *Fertig* **bern3**(t) ▸ t^3

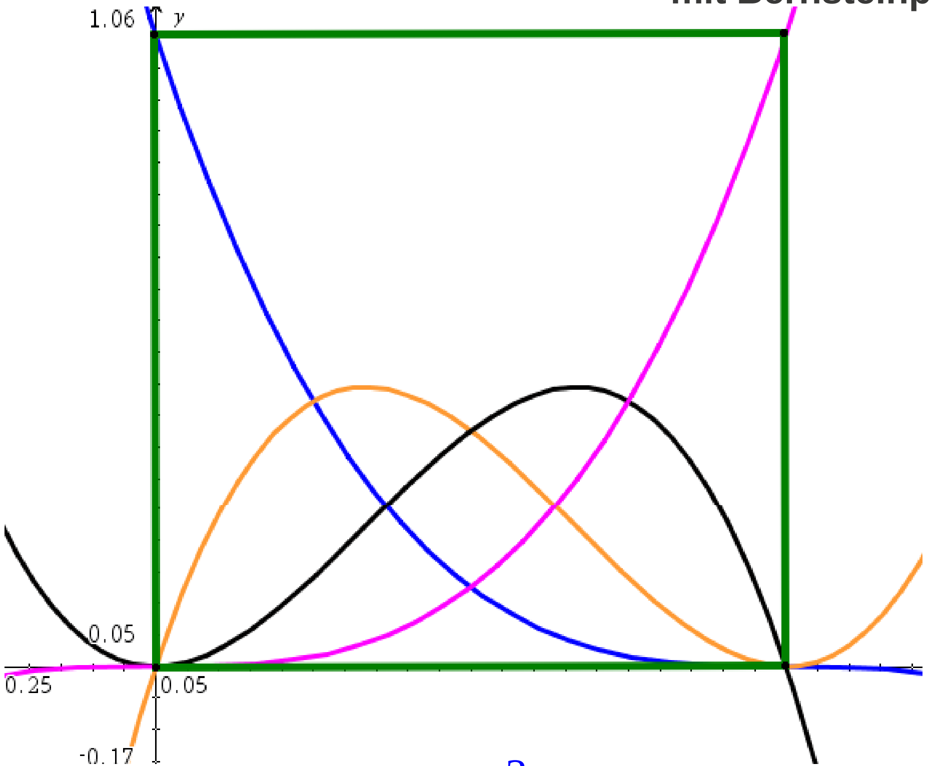
Das sind die vier Bernsteinpolynome.

$$B_0(t) = (1-t)^3 \qquad B_1(t) = 3\,t\,(1-t)^2$$

$$B_2(t) = 3t^2(1-t) \qquad B_3(t) = t^3$$

Bézier-Splines

mit Bernsteinpolynomen



Vier Bernsteinpolynome

$$B_0(t) = (1-t)^3$$

$$B_1(t) = 3\,t\,(1-t)^2$$

$$B_2(t) = 3t^2(1-t)$$

$$B_3(t) = t^3$$

$$q\,(1-t)^3 + s\,3\,t\,(1-t)^2 + r\,3t^2(1-t) + v\,t^3 \equiv 0$$

Sie sind linear unabhängig.

Sie bilden eine Basis

im VR der Polynome (bis Grad 3).

B_0 und B_1 sind wegen der Nullstellen unabhängig von den anderen.

B_2 und B_3 können auch nicht zum Nullpolynom kombiniert werden , denn t=1/3 und t=2/3 erzwingen in 2 B_2 +r B_3 =0 das System s4+2r=0 und 2s+4r=0

Bézier-Splines

mit Bernsteinpolynomen

Aus den Bernsteinpolynomen entsteht das Interpolationspolynom in Parameterdarstellung

$$x(t) := ax \cdot B_0(t) + bx \cdot B_1(t) + cx \cdot B_2(t) + dx \cdot B_3(t)$$

$$y(t) := ay \cdot B_0(t) + by \cdot B_1(t) + cy \cdot B_2(t) + dy \cdot B_3(t)$$

als Linearkombination

direkt aus den Steuerpunkten

Differenzialgleichungen

Ansatz für spezielle Lösung:

Suche Basis im Vektorraum der Störfunktion (und ihrer Ableitungen)

$$y'' + k\, y' + m\, y = g(x)$$

$g(x) = x \qquad G(x) = a + b\,x$

$g(x) = x^2 \qquad G(x) = a + b\,x + c\,x^2$

$g(x) = \sin(2x) \qquad G(x) = a\,\sin(2x) + b\,\cos(2x)$

So ergiebig sind die Begriffe Basis und Dimension

Fazit

Anfangs versprach ich:

Nun gleich anschießend zur „Bereicherung“:

Dies war nun mein Vorschlag.

Warum sollte man den Begriff “Basis” reichhaltig lehren?

Mathematische Begründung	Die **Vernetzung** der Themen ist essentiell für die Mathematik. Wenn man sie ans Ende einer Ausbildung stellt, kann sie ihre prägende Kraft nicht mehr entfalten.
Erkenntistheoretische Begründung	Für abstrakte Begriffe müssen „**Wirklichkeiten**“ vorgestellt werden, von denen die Begriffe abstrahiert=weggezogen werden können. Mindesten müssen sie **zum Tragen** kommen.
Lernpsychologische Begründung	Ohne **Akzeptanz und Neugier** kann kein Lernen statt-finden. Eine reichhaltige Einbindung eröffnet **Perspektiven** und bietet Identifizierungsmöglichkeit. Das gilt umso mehr, wenn **Interaktionen** ermöglicht werden.
Pragmatische Anmerkung	Auch für die Hochschulmathematik sollte ein **Spiralcurriculum** entwickelt werden.

Vielen Dank

für Ihre

Aufmerksamkeit!

Sie finden alles bei

www.mathematik-verstehen.de

Bereiche Numerik und Lineare Algebra

Spektrum Akademischer Verlag /Springer
ISBN 978 8274 2044 2
www.mathematik-sehen-und-verstehen.de