Gleichungen 4. Grades

1. Normalform:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0\,.$$

Sind alle Koeffizienten dieser Gleichung reell, dann hat sie keine oder 2 oder 4 reelle Lösungen.

2. Spezielle Formen: Wenn $b = d = 0$ ist, dann können die Wurzeln von

$$ax^4 + cx^2 + e = 0$$

mit Hilfe der Formeln

$$x_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{y}, \quad y = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4ac}}{2a}$$

berechnet werden. Für $a = e$ und $b = d$ werden die Wurzeln der Gleichung

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$$

mit Hilfe der Formeln

$$x_{1,2,3,4} = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4}}{2}, \quad y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac + 8a^2}}{2a}$$

berechnet.

Lösung der allgemeinen Gleichung 4. Grades, Methode 1, Faktorenzerlegung

Faktorenzerlegung der linken Seite von

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0 = a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)$$

führt, falls das gelingt, direkt auf die Wurzeln

$$x_1 = \alpha\,, \quad x_2 = \beta\,, \quad x_3 = \gamma\,, \quad x_4 = \delta\,.$$

Beispiel

$$x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x = 0\,, \; x(x^2-1)(x-2) = x(x-1)(x+1)(x-2)\,;$$

$$x_1 = 0\,, \; x_2 = 1\,, \; x_3 = -1\,, \; x_4 = 2\,.$$

Lösung der allgemeinen Gleichung 4. Grades, Methode 2

Die Wurzeln der Gleichung (1.164a) stimmen für $a = 1$ mit den Wurzeln der Gleichung

$$x^2 + (b + A)\frac{x}{2} + \left(y + \frac{by - d}{A}\right) = 0$$

überein, wobei $A = \pm\sqrt{8y + b^2 - 4c}$ und y irgendeine reelle Wurzel der kubischen Gleichung

$$8y^3 - 4cy^2 + (2bd - 8e)y + e(4c - b^2) - d^2 = 0$$

ist.