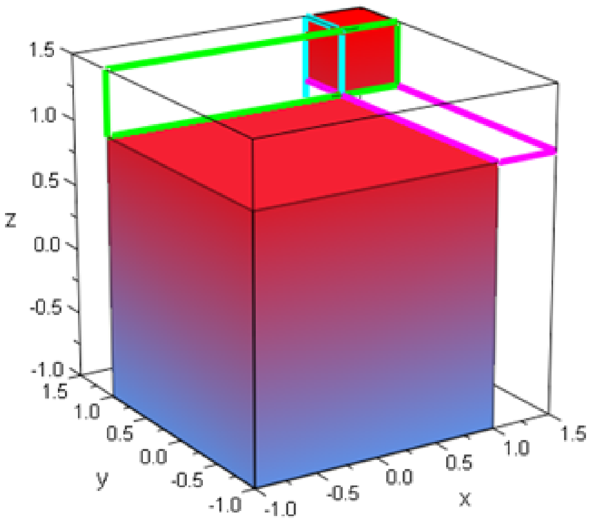
Kubische Gleichung nach Tartaglia und Cardano

Insgesamt 4 Seiten



Der große Würfel $(u+v)^3$ ist zusammengesetzt aus
3 Platten mit Kante $(u+v)$ Breite u,
Höhe v, also Volumen je $u\,v\,(u+v)^3$
+ mittlerer Würfel u^3,
+ kleiner Würfel v^3
Also gilt:

$$(u+v)^3 = 3uv(u+v) + (u^3+v^3)$$

$$x^3 \;=\; p\;x \quad + q$$

Lösungsvorschlag
Setze:

$$p = 3uv \wedge q = u^3 + v^3$$

Dann sind aus diesem Gleichungssystem u und v zu bestimmen.
Diese Darstellung ist die 3D-Umsetzung der Vorstellung von Al Khwarizmi für quadratische Gleichung

$v = \dfrac{p}{3u}$ und damit $q = u^3 + \left(\dfrac{p}{3u}\right)^3$. Diese Gleichung ergibt $u^6 - q\,u^3 + \left(\dfrac{p}{3}\right)^3 = 0$.

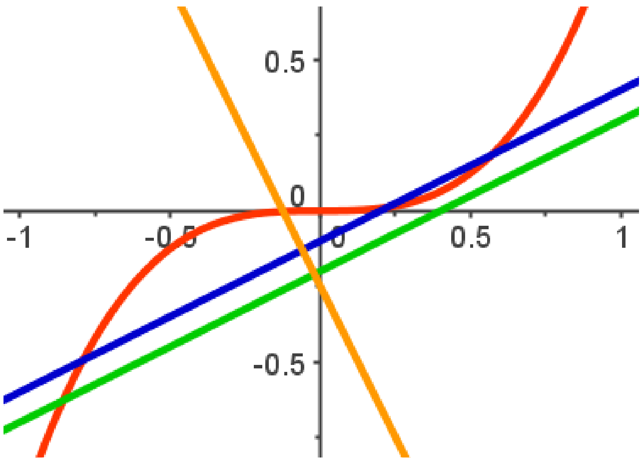
Das ist lösbar als tri-quadratische Gleichung $w^2 - q\,w + \dfrac{p^3}{27} = 0 \quad \text{mit} \quad w := u^3$

Die quadratische Gleichung hat die Lösungen

$$w = \frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}} = \frac{q}{2} \pm \sqrt{R} \quad mit\ R := \frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}.$$

Die Diskriminante R bestimmt das Lösungsverhalten:

1. R>0 ist für negative p garantiert, (zeigt orangefarbene Gerade) aber auch bei positivem p kann ein hinreichend großes q noch R>0 bewirken (grüne Gerade).
2. R=0 Dieser Fall tritt ein, wenn die Gerade die Potenzfunktion berührt.
3. R<0 Dieser Fall heißt casus irreducibilis. w ist dann nicht reell, sonder komplex. Die Gerade schneidet die Potenzfunktion dann dreimal.



Diese Fälle werden nun im Einzelnen untersucht.

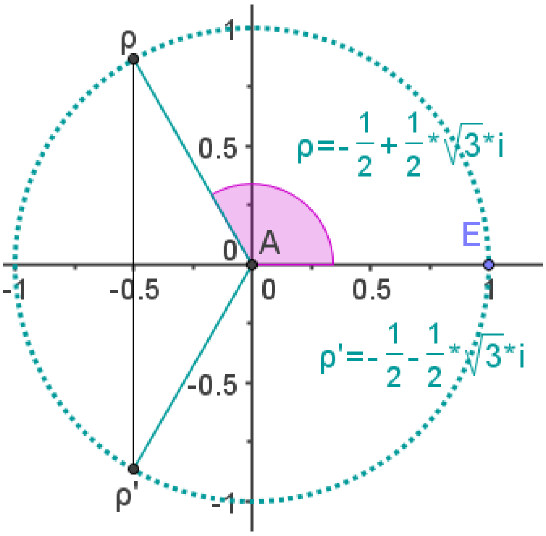
Cardano: casus irreducibilis 1/2

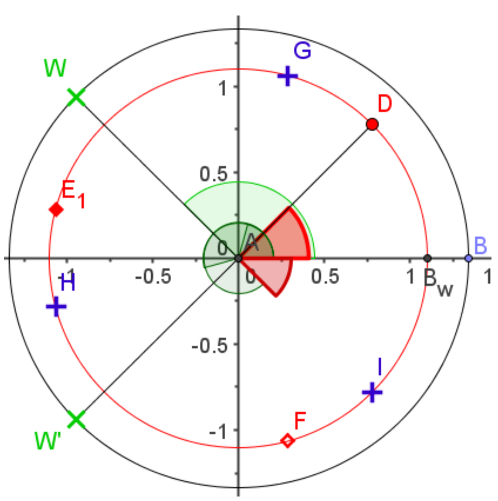
Auf der Seite: **Cardano: Würfelidee** wurde erklärt, wie man von der Gleichung $x^3 = p\,x + q$ mit den Substitutionen $x = u + v \;\; und \;\; p = 3uv \;\; und \;\; q = u^3 + v^3 \;\; und \;\; w = u^3$ zu $w = \frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}} = \frac{q}{2} \pm \sqrt{R} \;\; mit \;\; R := \frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}$ gelangt. Auf dieser Seite wird der **Fall** $R < 0$ **untersucht.**

Dieser Fall heißt casus irreducibilis. w ist jetzt nicht reell, sondern komplex.

Es gilt dann $w = u^3 = \frac{q}{2} \pm \sqrt{-R} \cdot i$, also zwei zueinander konjugiert-komplexe Lösungen für w.

Im Komplexen gibt es nun stets drei verschiedene dritte Wurzeln, die sich aus einer von ihnen durch Multiplikation mit den komplexen Einheitswurzeln ergeben. Diese liegen in der Gaußschen Zahlenebene auf einem „Mercedes-Stern“, das gilt dann auch für die dritten Wurzeln aus einer beliebigen komplexen Zahl





$\rho = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

$\rho' = \overline{\rho} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

$w = r\,e^{i\varphi}$

$w = u^3$

$u = \sqrt[3]{w}$

$u_1 = \sqrt[3]{r}e^{i\frac{\varphi}{3}} = D$

In der GeoGebra-Realisierung sind links die 3. Einheitswurzeln $1,\, \rho,\, \rho' = \overline{\rho} = \rho^2$ zu sehen.

Es gibt drei Wurzeln von w und $w' = \overline{w}$ Man erhält sie also mit Multiplikation mit $\rho \;\; und \;\; \rho^2$.

$u_1 = \sqrt[3]{r}e^{i\frac{\varphi}{3}} = D = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + i\sqrt{-R}}$ und $u_2 = \rho\sqrt[3]{r}e^{i\frac{\varphi}{3}} = \sqrt[3]{r}e^{i\left(\frac{\varphi}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)} = E = \rho \cdot \sqrt[3]{\frac{q}{2} + i\sqrt{-R}}$

und $u_3 = \rho^2\sqrt[3]{r}e^{i\frac{\varphi}{3}} = \sqrt[3]{r}e^{i\left(\frac{\varphi}{3}-\frac{2\pi}{3}\right)} = F = \rho^2 \cdot \sqrt[3]{\frac{q}{2} + i\sqrt{-R}}$ Die Winkeldrittelung ist ausgerechnet, bekanntlich ist sie nicht konstruierbar. D, E und F sind rot eingezeichnet.

Die weiteren drei Lösungen für u aus $u^6 - qu^3 + \frac{p^3}{27} = 0$ vor der Substitution. $w = u^3$ müssen dann die konjugiert-komplexen Werte dieser Lösungen sein, blau eingezeichnet.
Rechnerisch:

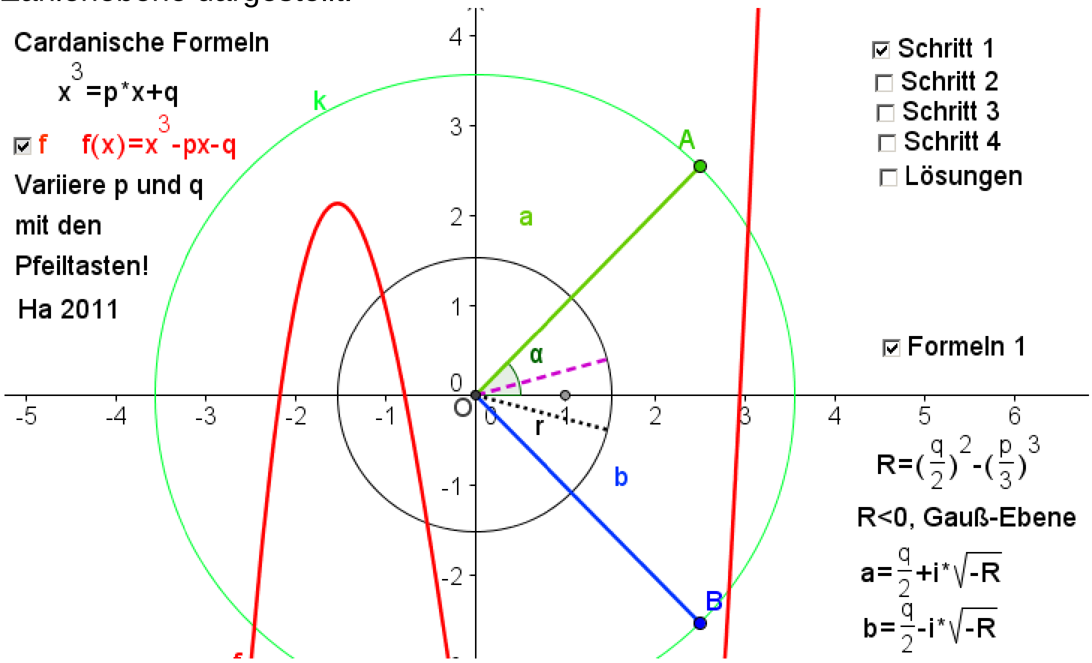
$u_4 = \sqrt[3]{r}e^{-i\frac{\varphi}{3}} = I = \sqrt[3]{\frac{q}{2} - i\sqrt{-R}}$, $u_5 = \rho^2\sqrt[3]{r}e^{-i\frac{\varphi}{3}} = \sqrt[3]{r}e^{-i\left(\frac{\varphi}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)} = H = \rho^2 \cdot \sqrt[3]{\frac{q}{2} - i\sqrt{-R}}$

und $u_6 = \rho\sqrt[3]{r}e^{i\frac{\varphi}{3}} = \sqrt[3]{r}e^{i\left(-\frac{\varphi}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)} = F = \rho \cdot \sqrt[3]{\frac{q}{2} - i\sqrt{-R}}$

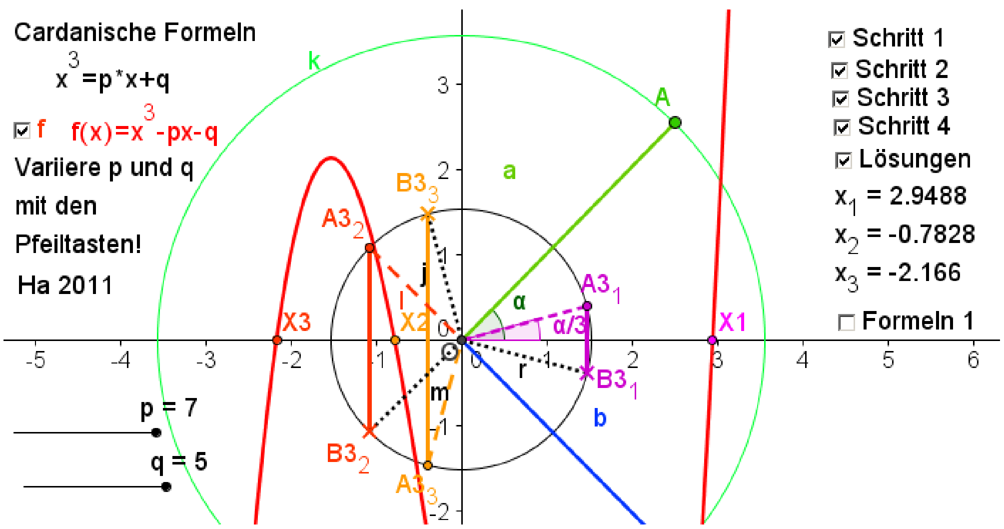
Nun ergibt sich (s.u.), dass die zugehörigen v aus $v = \frac{p}{3u}$ keine neuen Zahlen sind sondern es ist $v_1 = u_4,\ v_2 = u_5,\ v_3 = u_6$, so dass sich für die Lösungen das Doppelte der Realteile der u : $x_1 = u_1 + v_1 = 2\ \Re(u_1)\ und\ \ x_2 = u_2 + v_2 = 2\ \Re(u_2)\ \ und\ \ x_3 = u_3 + v_3 = 2\ \Re(u_3)$ ergibt.

Beweis für die v: $v_1 = \frac{p}{3u} = \frac{p}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{q}{2} + i\sqrt{-R}}} = \frac{p}{3}\sqrt[3]{\frac{\frac{q}{2} - i\sqrt{-R}}{\frac{q^2}{4} - \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = u_4$ Ebenso für die anderen v. Dass sich keine anderen Zahlen ergeben, liegt auch daran, dass das Problem in u und v symmetrisch ist.

In der folgenden GeoGebra-Datei zum casus irreducibiles lassen sich p und q beliebig einstellen. Es wird daraus R berechnet und dann A=w und B=w' als Punkte in der Gaußschen Zahlenebene dargestellt.



Wie oben schon ausführlich beschrieben, werden die sechs u, aufgefasst als drei u und drei v und die Lösungen durch Spiegelung des Ursprungs an der Realteil-Strecke erzeugt

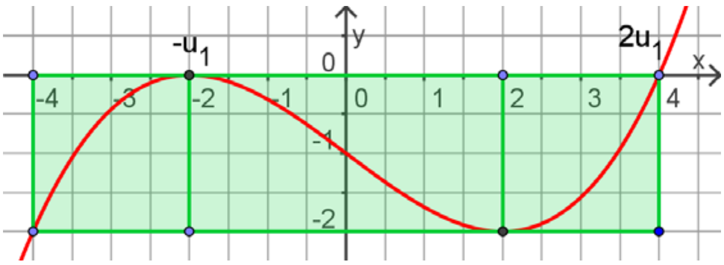


Didaktische Anmerkung: Selbstverständlich hat man nun nur numerische Lösungen, wie sie auch ganz direkt von Software (TI Nspire, Maxima, sogar GTR) geliefert werden. Es sind aber keine Werte aus einem Näherungsalgorithmus. Interessant ist für Lehramtsstudierende, was man hier über den Umgang mit komplexen Zahlen lernen kann. Dabei hat man noch wesentliche historische Einsichten. (Übrigens ist der wirkliche historische Weg wohl mühsamer.)

Cardano: einfache Fälle

Auf der Seite: **Cardano: Würfelidee** wurde erklärt, wie man von der Gleichung $x^3 = p\,x + q$ mit den Substitutionen $x = u + v \;\; und \;\; p = 3uv \;\; und \;\; q = u^3 + v^3 \;\; und \;\; w = u^3$ zu

$w = \frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}} = \frac{q}{2} \pm \sqrt{R} \;\; mit \;\; R := \frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}$ gelangt. Hier werden die Fälle $R \geq 0$ untersucht. **Zunächst sei R=0.** $\frac{q^2}{4} = \frac{p^3}{27}$ und $w = \frac{q}{2}$. Damit ist $u_1 = \sqrt[3]{\frac{q}{2}} = v_1$ reell und die reelle Lösung $x_1 = 2\,u_1 = 2\sqrt[3]{\frac{q}{2}}$ steht fest. Weiter folgt durch Multiplikation mit der 120°-Einheitswurzel $u_2 = (-\frac{1}{2} + i\sqrt{3})\,u_1,\; u_3 = \overline{u_2} = v_2$ Das Doppelte des Realteils dieses konjugiert-komplexen Paares ist $x_2 = x_3 = -\sqrt[3]{\frac{q}{2}} = -u_1$. Das ist eine **doppelte reelle Nullstelle des Polynoms**

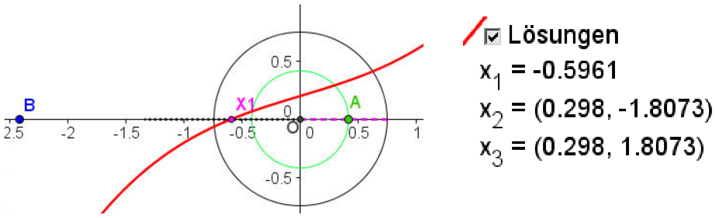


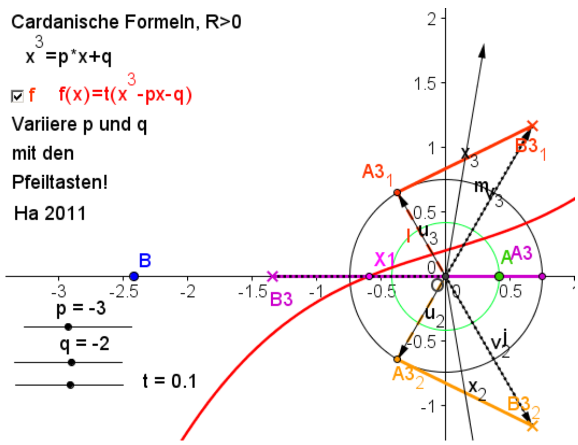
$f(x) = x^3 - p\,x - q$ bzw. berührt an dieser Stelle, die Gerade $g(x) = p\,x + q$ die Potenzfunktion $p(x) = x^3$. (Für u1=0 → Sattel)
Es ist bemerkenswert, das dieses Ergebnis zu den von mir unter **„Polynome in Affenkasten"** herausgestellten Eigenschaften passt. (Siehe Website ->Analysis)
Dass der Wendepunkt auf der y-Achse liegt sieht man an dem fehlenden x-Quadratterm.

Sei nun R>0: Auch in diesem Fall ist w reell. Es sind $u_1 = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{R}} \quad und \quad v_1 = \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{R}}$

verschiedene reelle Zahlen und damit $\boxed{x_1 = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{R}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{R}}}$

Es gibt genau eine reelle Lösung.





Obwohl es wieder, wie der Fundamentalsatz der Algebra fordert, konjugiert-komplexe Paare unter den sechs Lösungen für u gibt, werden diese wegen $p = 3uv$ anders kombiniert und es gibt keine weiteren reellen Lösungen.
Übrigens: Multipliziert man die beiden genannten Wurzeln noch mit $\rho \;\; und \;\; \rho^2$ bzw. $\rho^2 \;\; und \;\; \rho$, so hat man mit Werkzeugen, die komplexe Zahlen bewältigen, alle Fälle erfasst. (Siehe auch Seite: Casus irreducibiles)