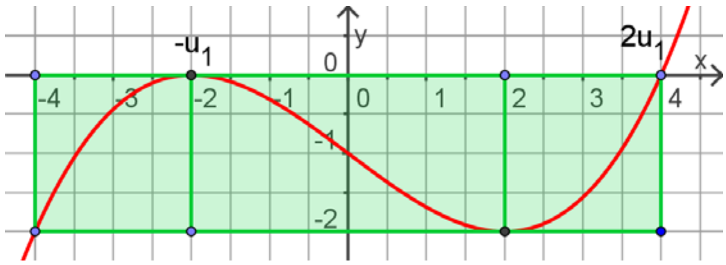
Cardano: einfache Fälle

Auf der Seite: **Cardano: Würfelidee** wurde erklärt, wie man von der Gleichung $x^3 = p\,x + q$ mit den Substitutionen $x = u + v \;\; und \;\; p = 3uv \;\; und \;\; q = u^3 + v^3 \;\; und \;\; w = u^3$ zu

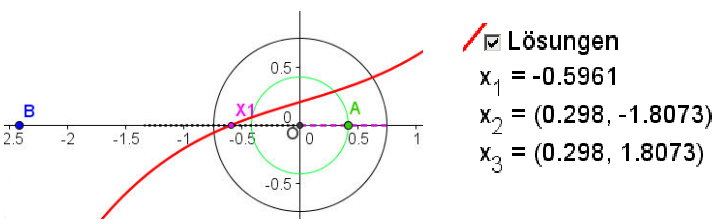
$w = \frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}} = \frac{q}{2} \pm \sqrt{R} \;\; mit \;\; R := \frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}$ gelangt. Hier werden die Fälle $R \geq 0$ untersucht. **Zunächst sei R=0.** $\frac{q^2}{4} = \frac{p^3}{27}$ und $w = \frac{q}{2}$. Damit ist $u_1 = \sqrt[3]{\frac{q}{2}} = v_1$ reell und die reelle Lösung $x_1 = 2\,u_1 = 2\sqrt[3]{\frac{q}{2}}$ steht fest. Weiter folgt durch Multiplikation mit der 120°-Einheitswurzel $u_2 = (-\frac{1}{2} + i\sqrt{3})\,u_1,\; u_3 = \overline{u_2} = v_2$ Das Doppelte des Realteils dieses konjugiert-komplexen Paares ist $x_2 = x_3 = -\sqrt[3]{\frac{q}{2}} = -u_1$. Das ist eine **doppelte reelle Nullstelle des Polynoms**

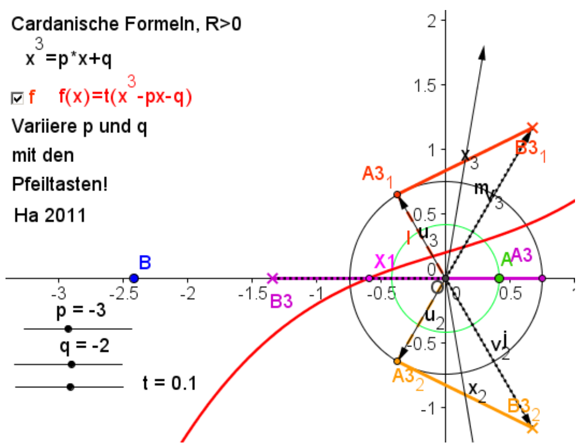


$f(x) = x^3 - p\,x - q$ bzw. berührt an dieser Stelle, die Gerade $g(x) = p\,x + q$ die Potenzfunktion $p(x) = x^3$. (Für u1=0 → Sattel)
Es ist bemerkenswert, das dieses Ergebnis zu den von mir unter **„Polynome in Affenkasten"** herausgestellten Eigenschaften passt. (Siehe Website ->Analysis)
Dass der Wendepunkt auf der y-Achse liegt sieht man an dem fehlenden x-Quadratterm.

Sei nun R>0: Auch in diesem Fall ist w reell. Es sind $u_1 = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{R}} \;\; und \;\; v_1 = \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{R}}$ verschiedene reelle Zahlen und damit $\boxed{x_1 = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{R}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{R}}}$

Es gibt genau eine reelle Lösung.





Obwohl es wieder, wie der Fundamentalsatz der Algebra fordert, konjugiert-komplexe Paare unter den sechs Lösungen für u gibt, werden diese wegen $p = 3uv$ anders kombiniert und es gibt keine weiteren reellen Lösungen.
Übrigens: Multipliziert man die beiden genannten Wurzeln noch mit $\rho \;\; und \;\; \rho^2$ bzw. $\rho^2 \;\; und \;\; \rho$, so hat man mit Werkzeugen, die komplexe Zahlen bewältigen, alle Fälle erfasst. (Siehe auch Seite: Casus irreducibiles)
cardano_einfache_faelle.docx