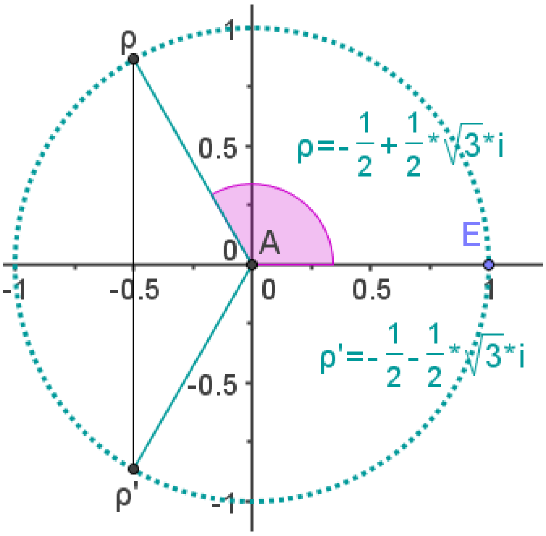
Cardano: casus irreducibilis 1/2

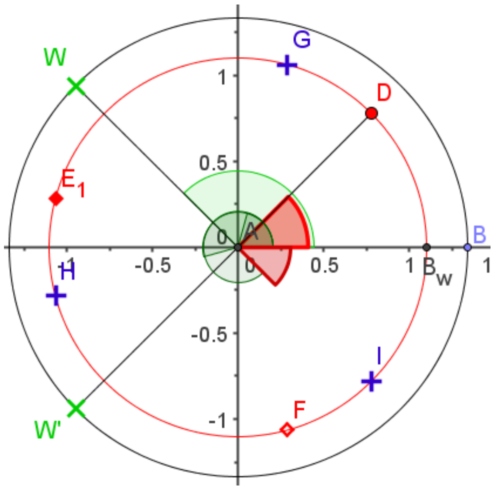
Auf der Seite: **Cardano: Würfelidee** wurde erklärt, wie man von der Gleichung $x^3 = px + q$ mit den Substitutionen $x = u + v \;\; und \;\; p = 3uv \;\; und \;\; q = u^3 + v^3 \;\; und \;\; w = u^3$ zu $w = \frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}} = \frac{q}{2} \pm \sqrt{R} \;\; mit \;\; R := \frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}$ gelangt. Auf dieser Seite wird der **Fall** $R < 0$ **untersucht.**

Dieser Fall heißt casus irreducibilis. w ist jetzt nicht reell, sondern komplex.

Es gilt dann $w = u^3 = \frac{q}{2} \pm \sqrt{-R} \cdot i$, also zwei zueinander konjugiert-komplexe Lösungen für w.

Im Komplexen gibt es nun stets drei verschiedene dritte Wurzeln, die sich aus einer von ihnen durch Multiplikation mit den komplexen Einheitswurzeln ergeben. Diese liegen in der Gaußschen Zahlenebene auf einem „Mercedes-Stern“, das gilt dann auch für die dritten Wurzeln aus einer beliebigen komplexen Zahl





$\rho = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

$\rho' = \overline{\rho} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

$w = r e^{i\varphi}$

$w = u^3$

$u = \sqrt[3]{w}$

$u_1 = \sqrt[3]{r} e^{i\frac{\varphi}{3}} = D$

In der GeoGebra-Realisierung sind links die 3. Einheitswurzeln $1, \rho, \rho' = \overline{\rho} = \rho^2$ zu sehen.

Es gibt drei Wurzeln von w und $w' = \overline{w}$ Man erhält sie also mit Multiplikation mit $\rho \; und \; \rho^2$.

$u_1 = \sqrt[3]{r} e^{i\frac{\varphi}{3}} = D = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + i\sqrt{-R}}$ und $u_2 = \rho \sqrt[3]{r} e^{i\frac{\varphi}{3}} = \sqrt[3]{r} e^{i\left(\frac{\varphi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)} = E = \rho \cdot \sqrt[3]{\frac{q}{2} + i\sqrt{-R}}$

und $u_3 = \rho^2 \sqrt[3]{r} e^{i\frac{\varphi}{3}} = \sqrt[3]{r} e^{i\left(\frac{\varphi}{3} - \frac{2\pi}{3}\right)} = F = \rho^2 \cdot \sqrt[3]{\frac{q}{2} + i\sqrt{-R}}$ Die Winkeldrittelung ist ausgerechnet, bekanntlich ist sie nicht konstruierbar. D, E und F sind rot eingezeichnet.

Die weiteren drei Lösungen für u aus $u^6 - qu^3 + \frac{p^3}{27} = 0$ vor der Substitution. $w = u^3$ müssen dann die konjugiert-komplexen Werte dieser Lösungen sein, blau eingezeichnet.
Rechnerisch:

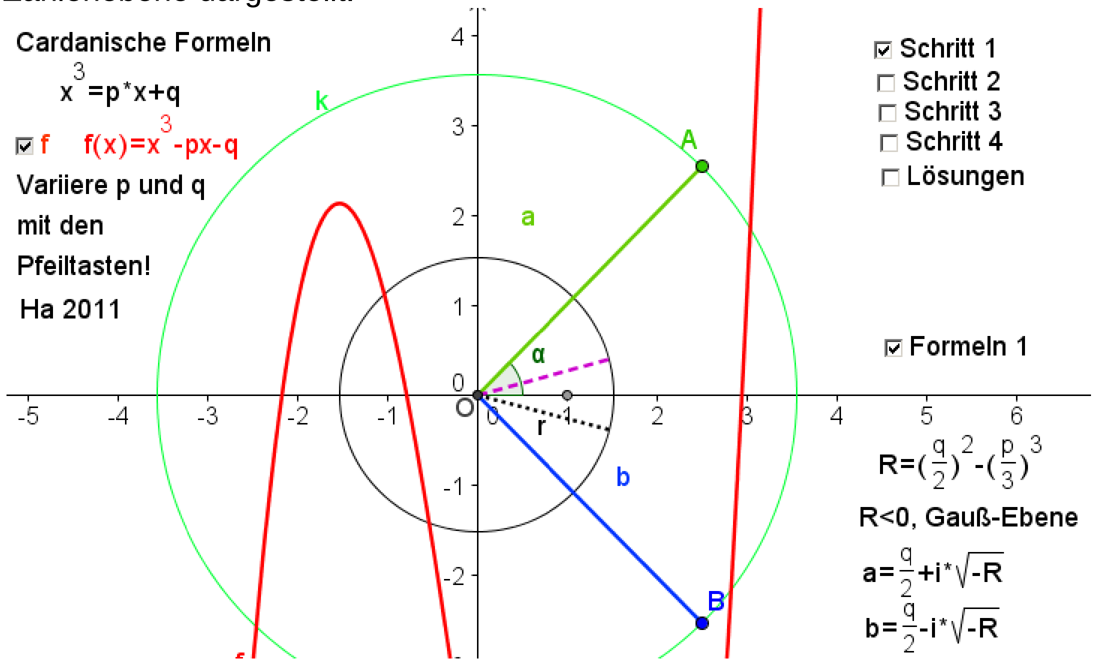
$u_4 = \sqrt[3]{r} e^{-i\frac{\varphi}{3}} = I = \sqrt[3]{\frac{q}{2} - i\sqrt{-R}}$, $u_5 = \rho^2 \sqrt[3]{r} e^{-i\frac{\varphi}{3}} = \sqrt[3]{r} e^{-i\left(\frac{\varphi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)} = H = \rho^2 \cdot \sqrt[3]{\frac{q}{2} - i\sqrt{-R}}$

und $u_6 = \rho \sqrt[3]{r} e^{i\frac{\varphi}{3}} = \sqrt[3]{r} e^{i\left(-\frac{\varphi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)} = F = \rho \cdot \sqrt[3]{\frac{q}{2} - i\sqrt{-R}}$

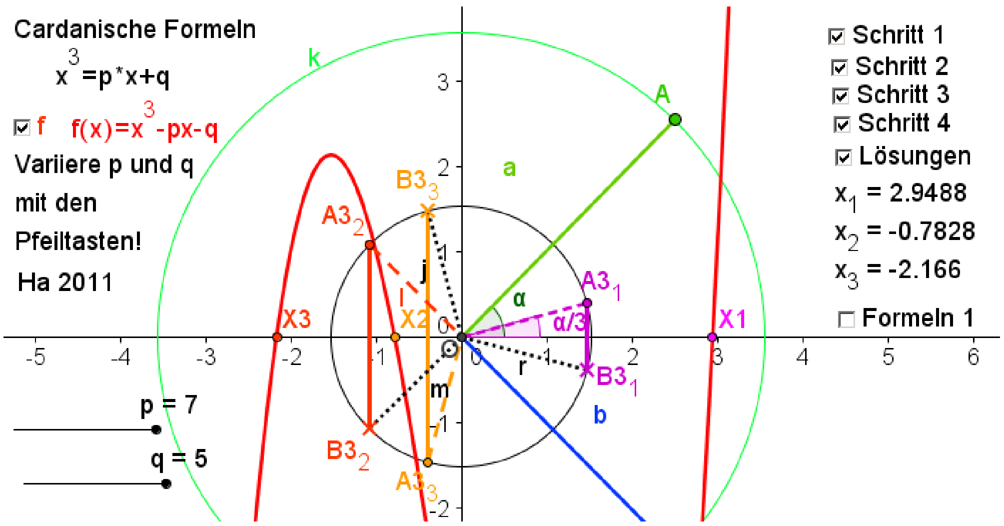
Nun ergibt sich (s.u.), dass die zugehörigen v aus $v = \frac{p}{3u}$ keine neuen Zahlen sind sondern es ist $v_1 = u_4,\ v_2 = u_5,\ v_3 = u_6$, so dass sich für die Lösungen das Doppelte der Realteile der u : $x_1 = u_1 + v_1 = 2\ \Re(u_1)$ *und* $x_2 = u_2 + v_2 = 2\ \Re(u_2)$ *und* $x_3 = u_3 + v_3 = 2\ \Re(u_3)$ ergibt.

Beweis für die v: $v_1 = \frac{p}{3u} = \frac{p}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{q}{2} + i\sqrt{-R}}} = \frac{p}{3} \sqrt[3]{\frac{\frac{q}{2} - i\sqrt{-R}}{\frac{q^2}{4} - \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = u_4$ Ebenso für die anderen v. Dass sich keine anderen Zahlen ergeben, liegt auch daran, dass das Problem in u und v symmetrisch ist.

In der folgenden GeoGebra-Datei zum casus irreducibiles lassen sich p und q beliebig einstellen. Es wird daraus R berechnet und dann A=w und B=w‘ als Punkte in der Gaußschen Zahlenebene dargestellt.



Wie oben schon ausführlich beschrieben, werden die sechs u, aufgefasst als drei u und drei v und die Lösungen durch Spiegelung des Ursprungs an der Realteil-Strecke erzeugt



Didaktische Anmerkung: Selbstverständlich hat man nun nur numerische Lösungen, wie sie auch ganz direkt von Software (TI Nspire, Maxima, sogar GTR) geliefert werden. Es sind aber keine Werte aus einem Näherungsalgorithmus. Interessant ist für Lehramtsstudierende, was man hier über den Umgang mit komplexen Zahlen lernen kann. Dabei hat man noch wesentliche historische Einsichten. (Übrigens ist der wirkliche historische Weg wohl mühsamer.)