Cardano, allgem. Lösungsfunktionen

Cardano–Formeln ganz allgemein Haftendorn 2011

Zu lösen ist $x^3=p\cdot x+q$ Zu dieser Form gibt es **vier Seiten mit vollständiger Erklärung.** An diese lehnt sich das Folgende an.

$\mathbf{w1}(p,q):=\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}}$ ▸ *Fertig* $\mathbf{w2}(p,q):=\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}}$ ▸ *Fertig*

$\mathbf{u1}(p,q):=\left(\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}}$ ▸ *Fertig* $\mathbf{u4}(p,q):=\left(\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}}$ ▸ *Fertig*

$\mathbf{u2}(p,q):=\left(\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot \boldsymbol{i}\right)\cdot \mathbf{u1}(p,q)$ ▸ *Fertig* $\mathbf{u5}(p,q):=\left(\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot \boldsymbol{i}\right)\cdot \mathbf{u4}(p,q)$ ▸ *Fertig*

$\mathbf{u3}(p,q):=\left(\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot \boldsymbol{i}\right)\cdot \mathbf{u1}(p,q)$ ▸ *Fertig* $\mathbf{u6}(p,q):=\left(\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot \boldsymbol{i}\right)\cdot \mathbf{u4}(p,q)$ ▸ *Fertig*

$\text{expand}\left(\left(\mathbf{u1}(p,q)\right)^3\right)$ ▸ $\frac{\sqrt{27\cdot q^2-4\cdot p^3}\cdot\sqrt{3}}{18}+\frac{q}{2}$ stimmt das mit w1 überein?

Forme die Wurzel um!

1.1

Ja, Wurzeln Umformen muss man eben können, $\text{expand}\left(\left(\mathbf{u1}(p,q)\right)^3\right)-\mathbf{w1}(p,q)$

Proben $27\cdot \mathbf{w1}(p,q)\cdot \mathbf{w2}(p,q)$ ▸ p^3

$\mathbf{v1}(p,q):=\dfrac{p}{3\cdot \mathbf{u1}(p,q)}$ ▸ *Fertig* $\mathbf{v1}(p,q)$ ▸ $\dfrac{p\cdot 3^{\frac{2}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}}{3\cdot\left(\sqrt{-3\cdot\left(4\cdot p^3-27\cdot q^2\right)}+9\cdot q\right)^{\frac{1}{3}}}$ Besser von Hand!

$\mathbf{v1}(7,5)=\mathbf{u4}(7,5)$ ▸ true

$\text{approx}\left(\mathbf{v1}(7,5)\right)$ ▸ $1.47441-0.399295\cdot \boldsymbol{i}$ $\text{approx}\left(\mathbf{u4}(7,5)\right)$ ▸ $1.47441-0.399295\cdot \boldsymbol{i}$

$\text{approx}\left(\dfrac{\frac{7}{3}}{\mathbf{u2}(7,5)}\right)$ ▸ $^-1.08301-1.07723\cdot \boldsymbol{i}$ $\text{approx}\left(\mathbf{u6}(7,5)\right)$ ▸ $^-1.08301-1.07723\cdot \boldsymbol{i}$

$\text{approx}\left(\dfrac{\frac{7}{3}}{\mathbf{u3}(7,5)}\right)$ ▸ $^-0.391408+1.47653\cdot \boldsymbol{i}$ $\text{approx}\left(\mathbf{u5}(7,5)\right)$ ▸ $^-0.391408+1.47653\cdot \boldsymbol{i}$

1.2

$3\cdot \mathbf{u2}(p,q)\cdot \mathbf{u6}(p,q) \blacktriangleright \dfrac{\left(24\cdot p^3\right)^{\frac{1}{3}}\cdot 3^{\frac{2}{3}}}{6}$ Ist das p? Terme sind von Hand leichter!!!

Damit ist mit v1=u4, v2=u6 und v3=u5

Die Lösungen sind dann:

$\mathbf{x1}(p,q):=\mathbf{u1}(p,q)+\mathbf{u4}(p,q) \blacktriangleright \mathit{Fertig}$ $\mathbf{x2}(p,q):=\mathbf{u2}(p,q)+\mathbf{u6}(p,q) \blacktriangleright \mathit{Fertig}$

$\mathbf{x3}(p,q):=\mathbf{u3}(p,q)+\mathbf{u5}(p,q) \blacktriangleright \mathit{Fertig}$

$$\text{expand}(\mathbf{x2}(7,5)) \blacktriangleright \frac{-\cos\left(\dfrac{\tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{41}\cdot\sqrt{17}\cdot\sqrt{3}}{45}\right)}{3}\right)\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{3}}{3} - \sin\left(\frac{\tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{41}\cdot\sqrt{17}\cdot\sqrt{3}}{45}\right)}{3}\right)\cdot\sqrt{7}$$

$\text{approx}([\mathbf{x1}(7,5)\quad \mathbf{x2}(7,5)\quad \mathbf{x3}(7,5)]) \blacktriangleright [2.94883\quad -2.16601\quad -0.782816]$

Mit diesen Funktionen x1((p,q),... kann diesen Typ $x^3=p\cdot x+q$ nun immer sofort lösen.

$\text{approx}([\mathbf{x1}(6,1)\quad \mathbf{x2}(6,1)\quad \mathbf{x3}(6,1)]) \blacktriangleright [2.52892\quad -2.36147\quad -0.167449]$

1.3

Dieses ist der Fall mit drei verschiedenenrellen Nullstellen.

$x^3=7\cdot x+5$ Siehe Grapfikfenster

$\mathbf{x1}(7,5) \blacktriangleright \dfrac{2\cdot\cos\left(\dfrac{\tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{2091}}{45}\right)}{3}\right)\cdot\sqrt{21}}{3}$ approx$(\mathbf{x1}(7,5)) \blacktriangleright 2.94883$

$\mathbf{x2}(7,5) \blacktriangleright \dfrac{-\cos\left(\dfrac{\tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{2091}}{45}\right)}{3}\right)\cdot\sqrt{21}}{3}-\sin\left(\dfrac{\tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{2091}}{45}\right)}{3}\right)\cdot\sqrt{7}$ approx$(\mathbf{x2}(7,5)) \blacktriangleright -2.16601$

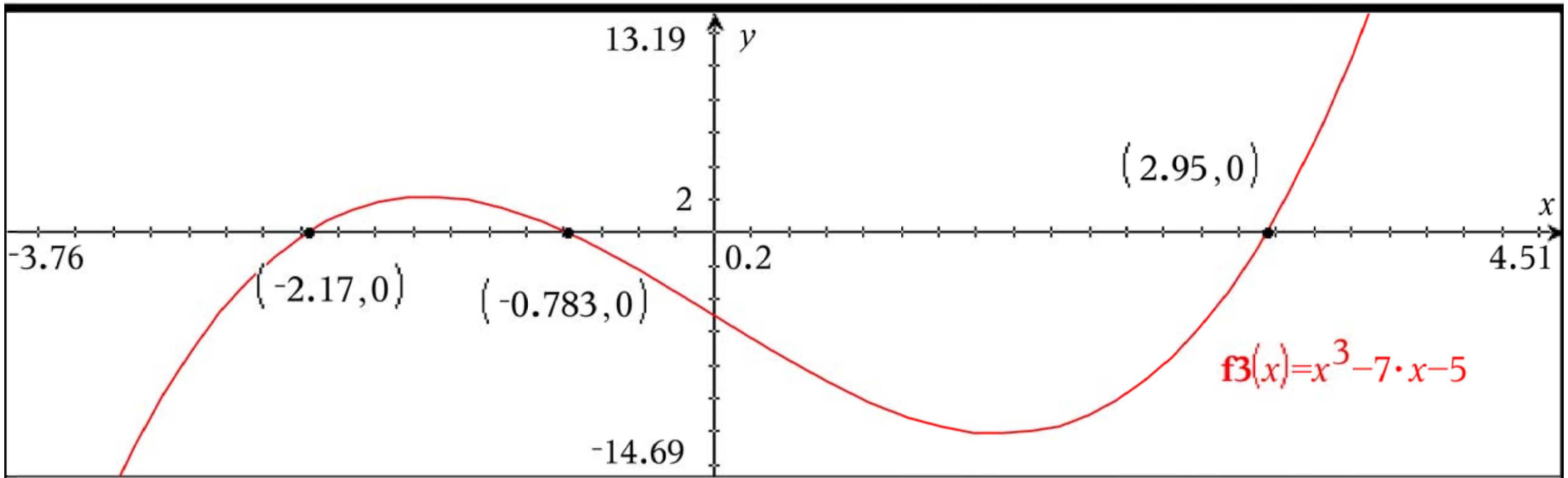
$\mathbf{x3}(7,5) \blacktriangleright \sin\left(\dfrac{\tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{2091}}{45}\right)}{3}\right)\cdot\sqrt{7}-\dfrac{\cos\left(\dfrac{\tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{2091}}{45}\right)}{3}\right)\cdot\sqrt{21}}{3}$

approx$(\mathbf{x3}(7,5)) \blacktriangleright -0.782816$

solve$(x^3=7\cdot x+5,x) \blacktriangleright x=-2.16601$ or $x=-0.782816$ or $x=2.94883$

exact(solve$(x^3=7\cdot x+5,x)$)

1.4



$\text{approx}([\mathbf{x1}(7,5)\ \ \mathbf{x2}(7,5)\ \ \mathbf{x3}(7,5)]) \blacktriangleright [2.94883\ \ {}^-2.16601\ \ {}^-0.782816]$

Dies sind also die Lösungen, also die Nullstellen der Funktion f(x)=0.

Zu beachten ist, dass man sie sich sinnvollerweise als Dezimalzahlen dezimalzahlen anzeigen lässt. Sie sind aber als Terme exakt berechnet. Es ist kein Näherungsverfahren wie eim Graphikfenster.

$$\mathbf{x1}(7,5) \blacktriangleright \frac{2\cdot\cos\left(\frac{\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2091}}{45}\right)}{3}\right)\cdot\sqrt{21}}{3}$$

1.5

Eine doppelte und eine einfache Nullstelle oder Sattel bei x=0

Dies ist der Fall mit Diskriminate=Null

$\mathrm{solve}\left(\frac{q^2}{4}=\frac{p^3}{27},p\right) \blacktriangleright p=\frac{3\cdot q^{\frac{2}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}}{2}$ $\quad \mathbf{fp}(q):=\frac{3\cdot q^{\frac{2}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}}{2} \blacktriangleright \mathit{Fertig}$

$\mathrm{expand}\left((x+2)^2\cdot(x-4)\right) \blacktriangleright x^3-12\cdot x-16$ siehe Grapfikfenster

$\mathbf{fp}(16) \blacktriangleright 12$

$\mathbf{x1}(12,16) \blacktriangleright 4 \quad \mathbf{x2}(12,16) \blacktriangleright {}^{-}2 \quad \mathbf{x3}(12,16) \blacktriangleright {}^{-}2$ eine einfache, eine doppelte Nst.

$\mathrm{solve}\left(x^3=12\cdot x+16,x\right) \blacktriangleright x={}^{-}2 \text{ or } x=4$

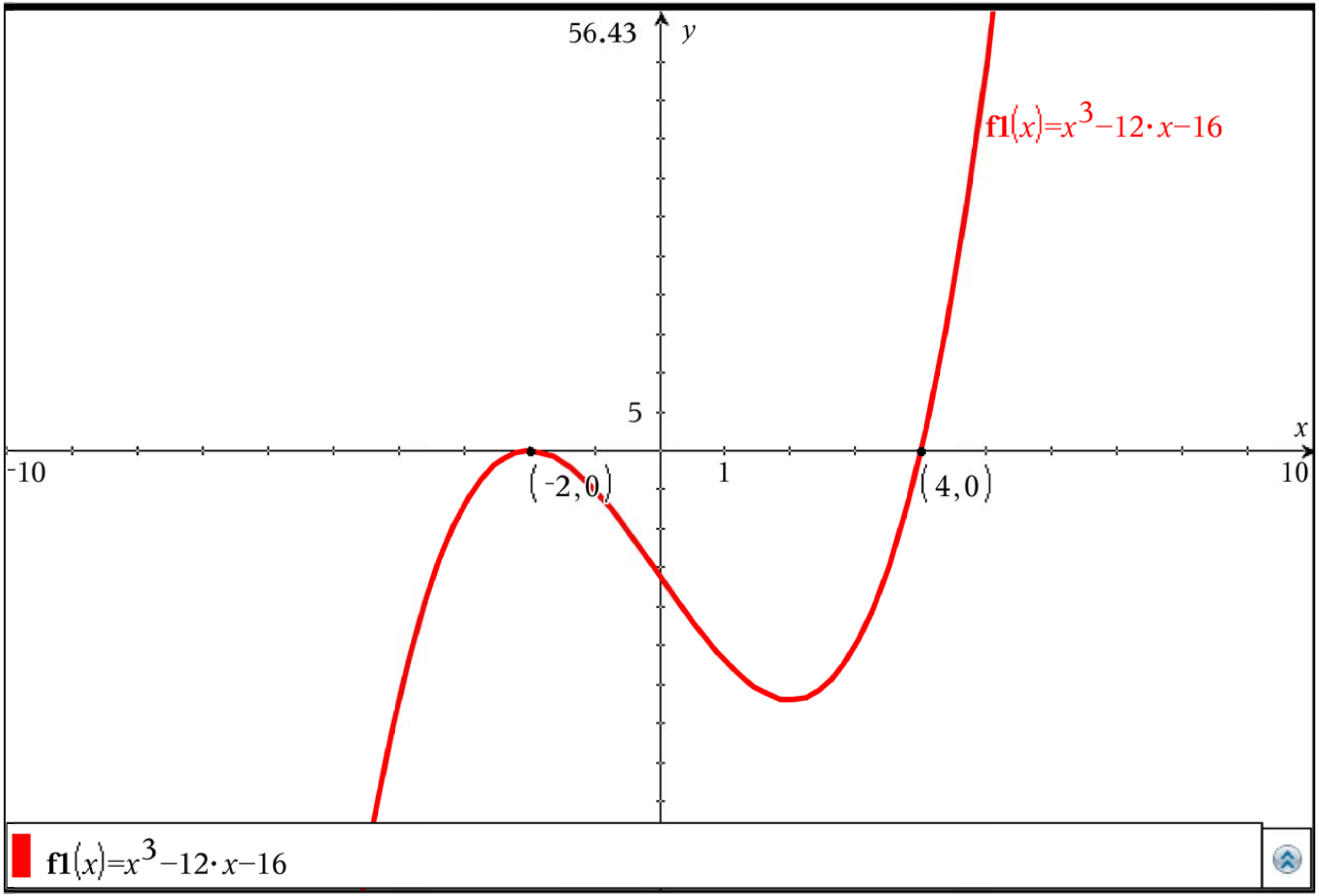
$\mathrm{zeros}\left(x^3-12\cdot x-16,x\right) \blacktriangleright \{{}^{-}2,4\}$

$\mathrm{exact}\left(\mathrm{solve}\left(x^3=12\cdot x+16,x\right)\right) \blacktriangleright x={}^{-}2 \text{ or } x=4$

$\mathrm{expand}\left((x-4)\cdot(x+2)^2\right) \blacktriangleright x^3-12\cdot x-16$ Auch in dieser Version wird man über die Vielfachheit informiert. Es handelt sich also um eine einfache und eine doppelte Nullstelle.

In dem Fall, dass p und q Null sind, handelt es sich um einen Sattel.

1.6



1.7

Dies ist ein Fall mit genau einer reellen Nullstelle

$x^3=-3\cdot x-2 \blacktriangleright x^3=-3\cdot x-2$

$\text{solve}\left(x^3=-3\cdot x+-2,x\right)$ Die Nullstelle liefert solve sofort.

$$\text{exact}\left(\text{solve}\left(x^3=-3\cdot x-2,x\right)\right) \blacktriangleright x=\frac{-2\cdot\left(2\cdot\sqrt{2}+3\right)^{\frac{1}{3}}}{\left(2\cdot\sqrt{2}+3\right)^{\frac{2}{3}}+\left(2\cdot\sqrt{2}+3\right)^{\frac{1}{3}}+1}$$

Die Funktionen xi(p,q) liefen hei nicht da richtige Ergebnis.

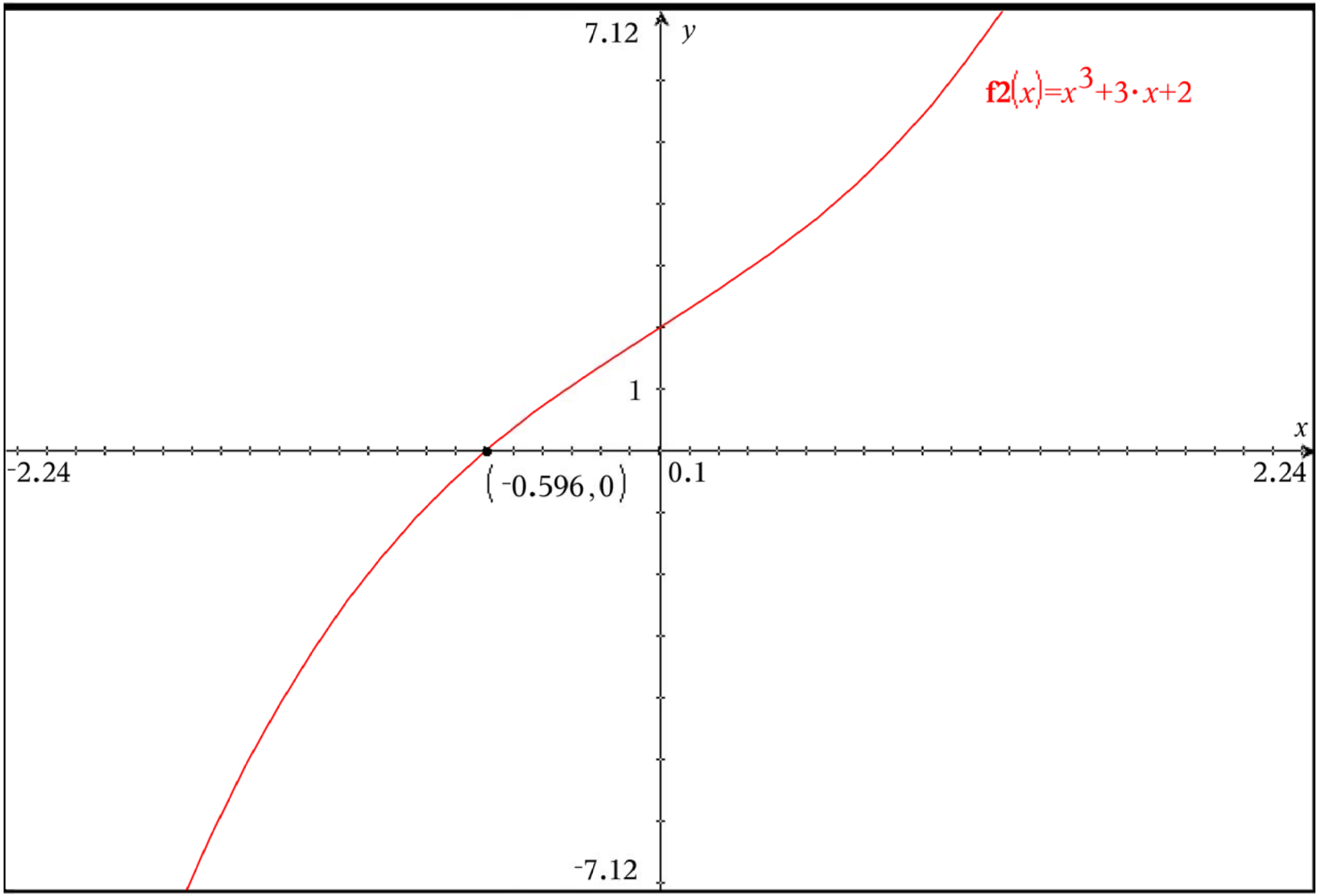
Der TI schein in diesem Fall intern die ui anders zu nehmen, jedenfalls werden nicht die richtigen kombiniert.

$\text{approx}\left(\mathbf{x1}(-3,-2)\right) \blacktriangleright 1.41618+1.16178\cdot \boldsymbol{i}$

$\text{approx}\left(\mathbf{x2}(-3,-2)\right) \blacktriangleright 0.298036-0.516213\cdot \boldsymbol{i}$

$\text{approx}\left(\mathbf{x3}(-3,-2)\right) \blacktriangleright -1.71422-0.645563\cdot \boldsymbol{i}$

1.8



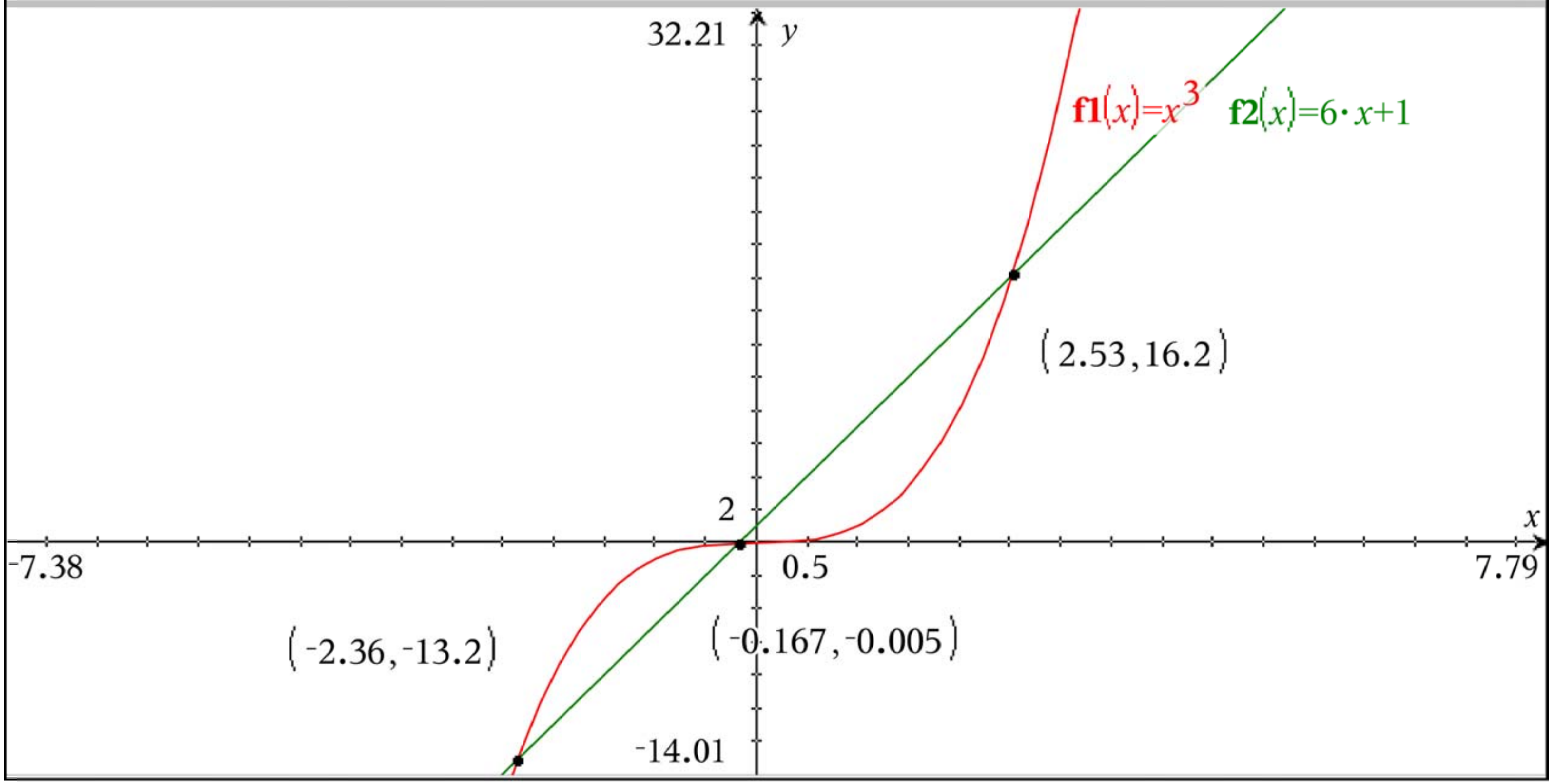
1.9

Cardano, eigene Gleichungen

Beispiel 1 zum Casus irreducibilis

Gleichung **gls**$:=x^3=6\cdot x+1$ Man betrachtet die linke und die rechte Seite Funktionsterme zweier Funktionen und wählt bei "Graph analysieren" Schnittpunkt aus.

Es ergeben sich als numerische Lösungen die Abszissen der Schnittpunkte.



2.1

Berechung mit cSolve(**gls**,x) ▸ $x=^-2.36147$ or $x=^-0.167449$ or $x=2.52892$

Wenn man aber das Gleichungssystem von Cardano löst, ergeben sich komplexe Wurzeln.

Achtung, die Anzeige sprengt den Bildschirm

lo:=cSolve$\left(\left\{6=3\cdot u\cdot v, 1=u^3+v^3\right\},\{u,v\}\right)$

approx(**lo**) ▸ $u=1.26446+0.633359\cdot i$ and $v=1.26446-0.633359\cdot i$ or $u=$
$1.26446-0.633359\cdot i$ and $v=1.26446+0.633359\cdot i$ or $u=^-0$
$.083725+1.41173\cdot i$ and $v=^-0.083725-1.41173\cdot i$ or $u=^-0.08$
$3725-1.41173\cdot i$ and $v=^-0.083725+1.41173\cdot i$ or $u=^-1.180$
$73+0.778374\cdot i$ and $v=^-1.18073-0.778374\cdot i$ or $u=^-1.18073$
$-0.778374\cdot i$ and $v=^-1.18073+0.778374\cdot i$

2.2

approx(**lo**) ▸ $u=1.26446+0.633359\cdot i$ and $v=1.26446-0.633359\cdot i$ or $u=$
$1.26446-0.633359\cdot i$ and $v=1.26446+0.633359\cdot i$ or $u=^{-}0$
$.083725+1.41173\cdot i$ and $v=^{-}0.083725-1.41173\cdot i$ or $u=^{-}0.08$
$3725-1.41173\cdot i$ and $v=^{-}0.083725+1.41173\cdot i$ or $u=^{-}1.1807$
$3+0.778374\cdot i$ and $v=^{-}1.18073-0.778374\cdot i$ or $u=^{-}1.18073-$
$-0.778374\cdot i$ and $v=^{-}1.18073+0.778374\cdot i$

$[1.26446+0.633359\cdot i+1.26446-0.633359\cdot i \quad 1.26446-0.633359\cdot i+1.26446+0.633359\cdot i \quad ^{-}0.$
▸ $[2.52892 \quad 2.52892 \quad ^{-}0.16745 \quad ^{-}0.16745 \quad ^{-}2.36146 \quad ^{-}2.36146]$

Also stimmen die sechs Lösungen für u mit den sechs Lösungen für v überein, die Paarung ist aber so, ein u und des dazugehörige v stets konjugiert komplex sind.

Bildet man nun sechsmal die Summe von einem u und dem zugehörigen v, so erhält man genau drei reelle Lösungen der gegebenen Gleichung.

2.3

Zahlenbeispiel

Problem 3:Zahlenbeispiel für Cardano

$\mathbf{f}(x):=x^3-3\cdot x+1$ ▸ *Fertig*

$\text{solve}(\mathbf{f}(x)=0,x)$ ▸ $x=^-\left(\cos\left(\frac{2\cdot\pi}{9}\right)+\sin\left(\frac{2\cdot\pi}{9}\right)\cdot\sqrt{3}\right)$ or $x=\frac{1}{\cos\left(\frac{2\cdot\pi}{9}\right)+\sin\left(\frac{2\cdot\pi}{9}\right)\cdot\sqrt{3}+1}$ or .

$x=\frac{\cos\left(\frac{2\cdot\pi}{9}\right)+\sin\left(\frac{2\cdot\pi}{9}\right)\cdot\sqrt{3}+1}{\cos\left(\frac{2\cdot\pi}{9}\right)+\sin\left(\frac{2\cdot\pi}{9}\right)\cdot\sqrt{3}}$

$\text{approx}(\text{solve}(\mathbf{f}(x)=0,x))$ ▸ $x=^-1.87939$ or $x=0.347296$ or $x=1.53209$

$\text{solve}(x^3=3\cdot x-1,x)$ ▸ $x=^-1.87939$ or $x=0.347296$ or $x=1.53209$ (mit Strg)

$\text{nSolve}(\mathbf{f}(x)=0,x)$ ▸ 0.347296 findet nicht alle

$\text{nSolve}(\mathbf{f}(x)=0,x,^-2,^-1)$ ▸ $^-1.87939$ man muss Grenzen angeben.

3.1

Nun soll der Weg von Tartaglia und Cardano gegangen werden.

$f(x)$ ▸ $x^3-3\cdot x+1$

x=u+v // x^3=p x + q // p=3u v =3 // und q=u^3+v^3=−1//

$\text{solve}\left(\left\{3\cdot u\cdot v=3, u^3+v^3=-1\right\},\{u,v\}\right)$ ▸ false

$\text{lo}:=\text{cSolve}\left(\left\{3\cdot u\cdot v=3, u^3+v^3=-1\right\},\{u,v\}\right)$

▸ $u=0.766044+0.642788\cdot i$ and $v=0.766044-0.642788\cdot i$ or $u=0.766044-0.642788\cdot i$ and $v=0.766044+0.642788\cdot i$ or $u=0.173648+0.984808\cdot i$ and $v=0.173648-0.984808\cdot i$ or $u=0.173648-0.984808\cdot i$ and $v=0.173648+0.984808\cdot i$ or $u=-0.939693+0.34202\cdot i$ and $v=-0.939693-0.34202\cdot i$ or $u=-0.939693-0.34202\cdot i$ and $v=-0.939693+0.34202\cdot i$

$\text{angle}(0.766044+0.642788\cdot i)$ ▸ 0.698132

$\text{approx}\left(\frac{2\cdot\pi}{9}\right)$ ▸ 0.698132 Dies ist also ein besondere Fall, w und w' sind schon die 3ten Einheitswurzeln. $\left((0.766044+0.642788\cdot i)^3\right)$▸Polar ▸ $e^{2.0944\cdot i}\cdot 1.$ $\text{approx}\left(\frac{2\cdot\pi}{3}\right)$ ▸ 2.0944

3.2

$\text{cSolve}\left(\frac{1}{u^3}+u^3=^-1,u\right)$

▸ $u=0.766044+0.642788\cdot i$ or $u=0.766044-0.642788\cdot i$ or $u=0.173648+0.984808\cdot i$ or $u=0.173648-0.984808\cdot i$ or $u=^-0.939693+0.34202\cdot i$ or $u=^-0.939693-0.34202\cdot i$

Dies sind die erwarteten sechs Lösungen, von denen man die passenden, die p=3 u v erfüllen addieren muss, um die reellen Lösungen zu erhalten.

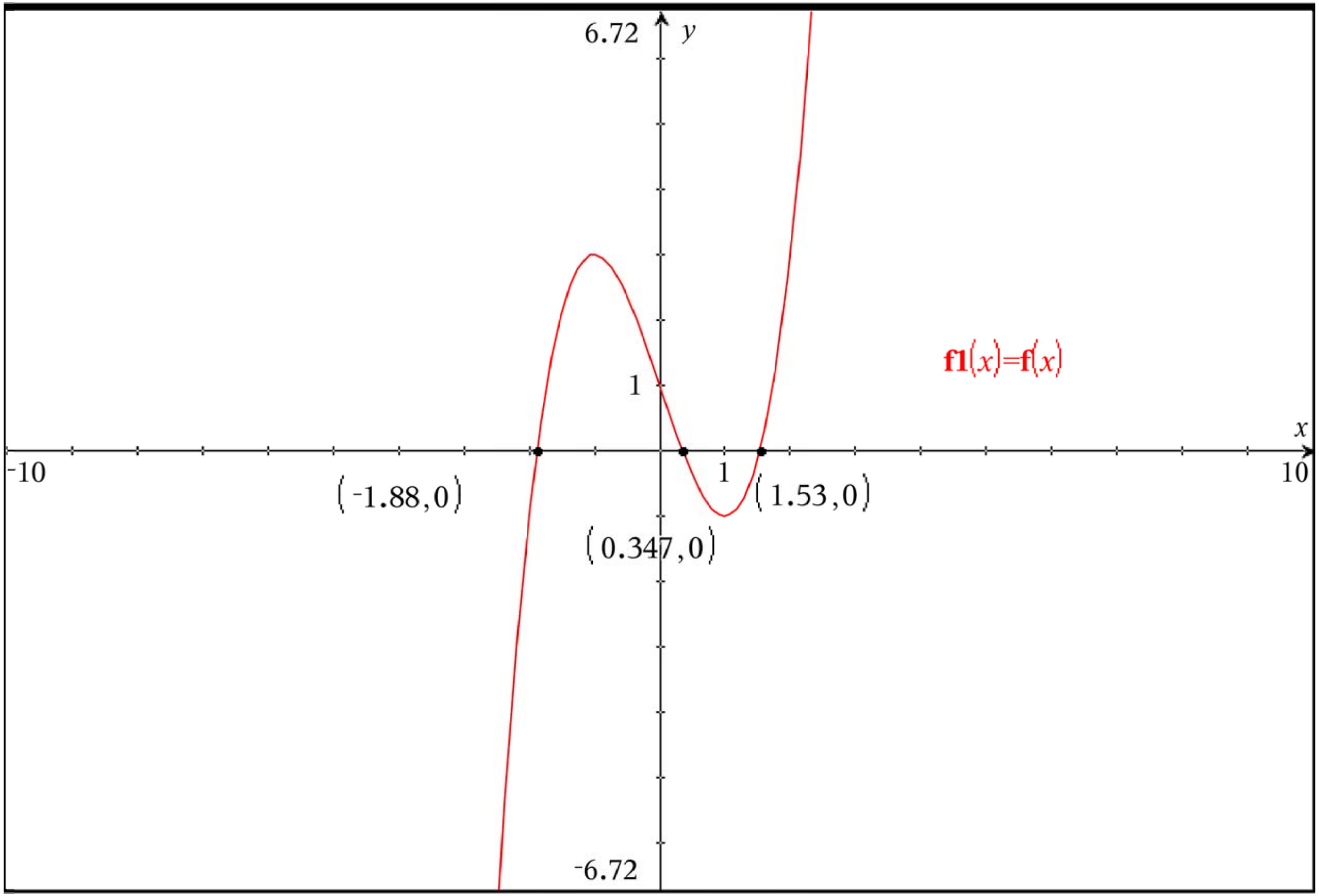
$\text{solve}(f(x)=0,x)$ ▸ $x=^-1.87939$ or $x=0.347296$ or $x=1.53209$

$0.766044+0.642788\cdot i+0.766044-0.642788\cdot i$ ▸ 1.53209

$0.173648+0.984808\cdot i+0.173648-0.984808\cdot i$ ▸ 0.347296

$^-0.939693+0.34202\cdot i+^-0.939693-0.34202\cdot i$ ▸ $^-1.87939$

3.3



3.4

Allg.Poynom 3 Grades anpassen

Problem 3 Allgemeine Polynom 3. Grades anpassen

Die Cardano−Formeln aus Problem 1 erfordern $x^3-p\,x-q=0$

Anpassung von Polynomen 3. Grades mit quadratischen Term an diese Form:

$\mathbf{fallg}(x):=x^3+a\cdot x^2+b\cdot x+c$ ▸ *Fertig*

Man muss den Wendepunkt waagerecht auf die y−Achse verschieben:

$\mathbf{xwallg}:=\mathrm{zeros}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}(\mathbf{fallg}(x))\right),x\right)[1]$ ▸ $\frac{-a}{3}$

$\mathbf{fcard}(x):=\mathbf{fallg}(x+\mathbf{xwallg})$ ▸ *Fertig*

$\mathbf{fcard}(x)$ ▸ $x^3-\frac{(a^2-3\cdot b)\cdot x}{3}+\frac{2\cdot a^3}{27}-\frac{a\cdot b}{3}+c$

4.1

Die Cardano−Formeln aus Problem 1 erfordern $x^3-p\,x-q=0$

Anpassung von Polynomen 3. Grades mit quadratischen Term an diese Form:

$\mathbf{f}(x):=(x+2)\cdot(x-1)\cdot(x-2)$ ▸ *Fertig* expand$(\mathbf{f}(x))$ ▸ $x^3-x^2-4\cdot x+4$

Man muss den Wendepunkt waagerecht auf die y−Achse verschieben:

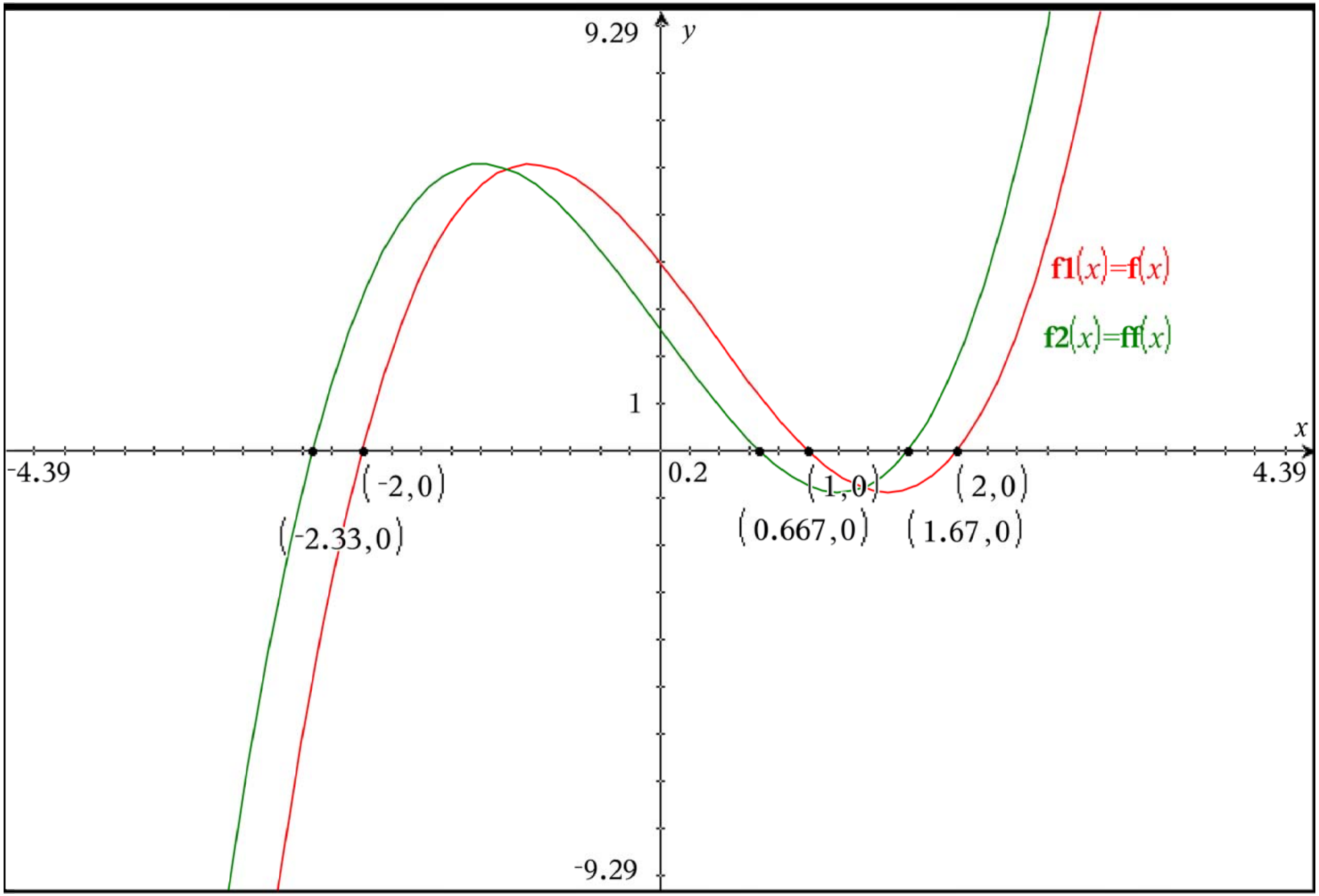
$\mathbf{xw}:=\text{zeros}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}(\mathbf{f}(x))\right),x\right)[1]$ ▸ $\frac{1}{3}$

$\mathbf{ff}(x):=\mathbf{f}(x+\mathbf{xw})$ ▸ *Fertig* expand$(\mathbf{ff}(x))$ ▸ $x^3-\frac{13\cdot x}{3}+\frac{70}{27}$

Also ist für die Cardano−Formeln p= $\frac{13}{3}$ und q= $\frac{70}{27}$

Siehe Graph−Fenster

4.2



4.3

Nochmal x^2 eliminieren

Problem 4 Anpassung Sonderfall: kein x−Term

Die Cardano−Formeln aus Problem 1 erfordern $x^3-p\,x-q=0$

Anpassung von Polynomen 3. Grades mit quadratischen Term an diese Form:

$\mathbf{f}(x):=x^3+b\cdot x^2+c$ ▸ *Fertig* und nun $\mathbf{ff}(x):=\text{expand}\left(\mathbf{f}\left(x-\frac{b}{3}\right)\right)$ ▸ *Fertig*

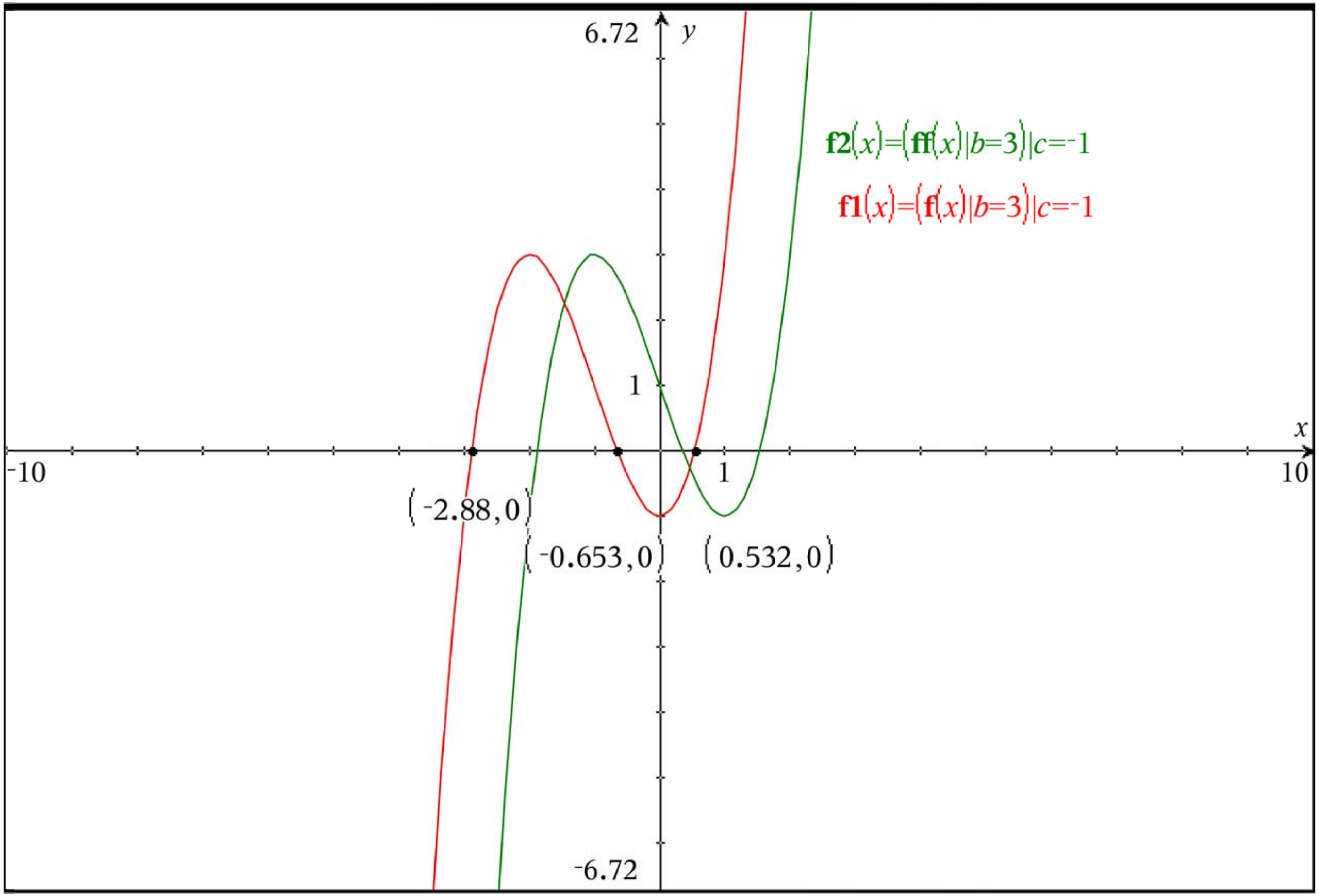
$\mathbf{ff}(x)$ ▸ $x^3-\frac{b^2\cdot x}{3}+\frac{2\cdot b^3}{27}+c$

Wenn man den Zusammenhang mit der Wendepunktlage kennt, überrascht diese Vorschlag der Formelsammlungen nicht.

$\text{approx}\left(\text{cSolve}\left(\left(\mathbf{f}(x)=0|b=3\right)|c=^-1,x\right)\right)$ ▸ $x=^-2.87939$ or $x=^-0.652704$ or $x=0.532089$

$\text{approx}\left(\text{cSolve}\left(\left(\mathbf{ff}(x)=0|b=3\right)|c=^-1,x\right)\right)$ ▸ $x=^-1.87939$ or $x=0.347296$ or $x=1.53209$ um 1 verschoben:

5.1



5.2