

Cardano, allgem. Lösungsfunk...

**Cardano-Formeln ganz allgemein** Haftendorn 2011

Zu lösen ist  $x^3 - p \cdot x + q = 0$ . Zu dieser Form gibt es vier Seiten mit vollständiger Erklärung. An diese lehnt sich das Folgende an.

$w1(p,q) := \frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}$  • Fertig  $w2(p,q) := \frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}$  • Fertig

$u1(p,q) := \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}$  • Fertig  $u4(p,q) := \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}$  • Fertig

$u2(p,q) := \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i\right) \cdot u1(p,q)$  • Fertig  $u5(p,q) := \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i\right) \cdot u4(p,q)$  • Fertig

$u3(p,q) := \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i\right) \cdot u1(p,q)$  • Fertig  $u6(p,q) := \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i\right) \cdot u4(p,q)$  • Fertig

$\text{expand}([u1(p,q)]^3) = \frac{\sqrt{27 \cdot q^2 - 4 \cdot p^3} + \sqrt{3} \cdot q}{18}$  stimmt das mit w1 überein?  
 Forme die Wurzel um!

1.1

Ja, Wurzeln Umformen muss man eben können,  $\text{expand}([u1(p,q)]^3) - w1(p,q)$

Proben  $27 \cdot w1(p,q) \cdot w2(p,q) = p^3$

$v1(p,q) := \frac{p}{3 \cdot u1(p,q)} \cdot \text{Fertig}$   $v1(p,q) = \frac{2}{p-3} \cdot \frac{1}{2 \cdot 3^3} \cdot \frac{1}{1}$  Besser von Hand!

$v1(7,5) = u4(7,5) + \text{true}$

$\text{approx}(v1(7,5)) = 1.47441 - 0.399295 \cdot i$   $\text{approx}(u4(7,5)) = 1.47441 - 0.399295 \cdot i$

$\text{approx}\left(\frac{2}{u2(7,5)}\right) = -1.08301 - 1.07723 \cdot i$   $\text{approx}(u5(7,5)) = -1.08301 - 1.07723 \cdot i$

$\text{approx}\left(\frac{2}{u3(7,5)}\right) = -0.391408 + 1.47653 \cdot i$   $\text{approx}(u6(7,5)) = -0.391408 + 1.47653 \cdot i$

1.2

$3 \cdot u2(p,q) \cdot u6(p,q) = \frac{(24 \cdot p^3)^{\frac{1}{3}} - 3 \cdot q}{9}$  Ist das p? Terme sind von Hand leichter!!!

Damit ist mit  $v1 = u4$ ,  $v2 = u6$  und  $v3 = u5$

Die Lösungen sind dann:

$x1(p,q) = u1(p,q) + u4(p,q)$  • Fertig  $x2(p,q) = u2(p,q) + u5(p,q)$  • Fertig

$x3(p,q) = u3(p,q) + u6(p,q)$  • Fertig

$\text{expand}(x2(7,5)) = \frac{\cos\left(\frac{\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{41} \cdot \sqrt{17} \cdot \sqrt{3}}{45}\right)}{3}\right) \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{3} - \sin\left(\frac{\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{41} \cdot \sqrt{17} \cdot \sqrt{3}}{45}\right)}{3}\right) \cdot \sqrt{7}}{3}$

$\text{approx}([x1(7,5) \ x2(7,5) \ x3(7,5)]) = [2.94883 \ -2.16601 \ 0.782816]$

Mit diesen Funktionen  $x1(p,q), \dots$  kann diesen Typ  $x^3 - p \cdot x + q = 0$  nun immer sofort lösen.

$\text{approx}([x1(6,1) \ x2(6,1) \ x3(6,1)]) = [2.52892 \ -2.36147 \ 0.167449]$

1.3

Dieses ist der Fall mit drei verschiedenen reellen Nullstellen.

$x^3 - 7 \cdot x + 5 = 0$  Siehe Graphfenster

$x1(7,5) = \frac{2 \cdot \cos\left(\frac{\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2091}}{45}\right)}{3}\right) \cdot \sqrt{21}}{3}$   $\text{approx}(x1(7,5)) = 2.94883$

$x2(7,5) = \frac{\cos\left(\frac{\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2091}}{45}\right)}{3}\right) \cdot \sqrt{21} - \sin\left(\frac{\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2091}}{45}\right)}{3}\right) \cdot \sqrt{7}}{3}$   $\text{approx}(x2(7,5)) = -2.16601$

$x3(7,5) = \frac{\cos\left(\frac{\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2091}}{45}\right)}{3}\right) \cdot \sqrt{7} + \sin\left(\frac{\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2091}}{45}\right)}{3}\right) \cdot \sqrt{21}}{3}$

$\text{approx}(x3(7,5)) = 0.782816$

$\text{solve}(x^3 - 7 \cdot x + 5, x) = x = -2.16601 \text{ or } x = 0.782816 \text{ or } x = 2.94883$

$\text{exact}(\text{solve}(x^3 - 7 \cdot x + 5, x))$

1.4

$\text{approx}([x1(7,5) \ x2(7,5) \ x3(7,5)]) = [2.94883 \ -2.16601 \ 0.782816]$

Dies sind also die Lösungen, also die Nullstellen der Funktion  $f(x) = 0$ .

Zu beachten ist, dass man sie sich sinnvollerweise als Dezimalzahlen dezimalzahlen anzeigen lässt. Sie sind aber als Terme exakt berechnet. Es ist kein Näherungsverfahren wie ein Graphfenster.

$x1(7,5) = \frac{2 \cdot \cos\left(\frac{\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2091}}{45}\right)}{3}\right) \cdot \sqrt{21}}{3}$

1.5

Eine doppelte und eine einfache Nullstelle oder Sattel bei  $x=0$

Dies ist der Fall mit Diskriminante=Null

$\text{solve}\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right) = p = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2 \cdot 3^3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$   $f(p,q) := \frac{3 \cdot q^3 - 2 \cdot p^3}{2}$  • Fertig

$\text{expand}([x+2]^2 \cdot (x-4)) = x^3 - 12 \cdot x - 16$  siehe Graphfenster

$f(16) = 12$

$x1(12,16) = 4$   $x2(12,16) = -2$   $x3(12,16) = -2$  eine einfache, eine doppelte Nst.

$\text{solve}(x^3 - 12 \cdot x - 16, x) = x = -2 \text{ or } x = 4$

$\text{zeros}(x^3 - 12 \cdot x - 16, x) = \{-2, 4\}$

$\text{exact}(\text{solve}(x^3 - 12 \cdot x - 16, x)) = x = -2 \text{ or } x = 4$

$\text{expand}([x-4] \cdot (x+2)^2) = x^3 - 12 \cdot x - 16$  Auch in dieser Version wird man über die Vielfachheit informiert. Es handelt sich also um eine einfache und eine doppelte Nullstelle. In dem Fall, dass p und q Null sind, handelt es sich um einen Sattel.

1.6

$\text{exact}(\text{solve}(x^3 - 3 \cdot x - 2, x)) = x = \frac{2 \cdot (2 \cdot \sqrt{2} + 3)^{\frac{1}{3}}}{(2 \cdot \sqrt{2} + 3)^{\frac{1}{3}} + (2 \cdot \sqrt{2} + 3)^{\frac{1}{3}} + 1}$

Die Funktionen  $x1(p,q)$  liefern bei nicht da richtige Ergebnisse.

Der T1 scheint in diesem Fall intern die ui anders zu nehmen, jedenfalls werden nicht die richtigen kombiniert.

$\text{approx}(x1(-3,2)) = 1.41618 + 1.16178 \cdot i$

$\text{approx}(x2(-3,2)) = 0.208036 - 0.516213 \cdot i$

$\text{approx}(x3(-3,2)) = -1.71422 - 0.645563 \cdot i$

1.7

Dies ist ein Fall mit genau einer reellen Nullstelle

$x^3 - 3 \cdot x - 2 = x^3 - 3 \cdot x - 2$

$\text{solve}(x^3 - 3 \cdot x - 2, x)$  Die Nullstelle liefert solve sofort.

$\text{exact}(\text{solve}(x^3 - 3 \cdot x - 2, x)) = x = \frac{2 \cdot (2 \cdot \sqrt{2} + 3)^{\frac{1}{3}}}{(2 \cdot \sqrt{2} + 3)^{\frac{1}{3}} + (2 \cdot \sqrt{2} + 3)^{\frac{1}{3}} + 1}$

Die Funktionen  $x1(p,q)$  liefern bei nicht da richtige Ergebnisse.

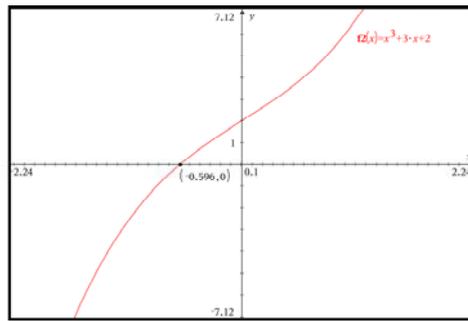
Der T1 scheint in diesem Fall intern die ui anders zu nehmen, jedenfalls werden nicht die richtigen kombiniert.

$\text{approx}(x1(-3,2)) = 1.41618 + 1.16178 \cdot i$

$\text{approx}(x2(-3,2)) = 0.208036 - 0.516213 \cdot i$

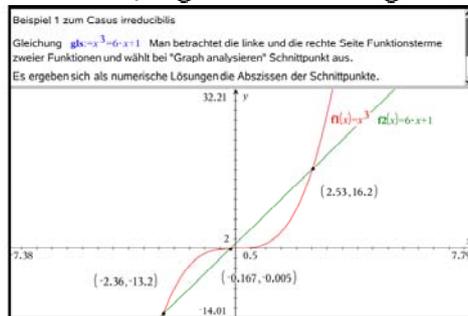
$\text{approx}(x3(-3,2)) = -1.71422 - 0.645563 \cdot i$

1.8



1.9

### Cardano, eigene Gleichungen



2.1

Berechnung mit `solve(g(x))`  $x = -2.36147$  or  $x = -0.167449$  or  $x = 2.52892$

Wenn man aber das Gleichungssystem von Cardano löst, ergeben sich komplexe Wurzeln.

Achtung, die Anzeige sprengt den Bildschirm

```

lo = cSolve({a=3*u*v, 1=u^3+v^3}, {u,v})
approx(lo)
u = 1.26446+0.633359*i and v = 1.26446-0.633359*i or u =
1.26446-0.633359*i and v = 1.26446+0.633359*i or u =
0.83725+1.41173*i and v = -0.83725-1.41173*i or u = 0.83725-1.41173*i and v = -0.83725+1.41173*i or u = 1.18073+0.778374*i and v = -1.18073-0.778374*i or u = -1.18073-0.778374*i and v = 1.18073+0.778374*i
    
```

2.2

```

approx(lo)
u = 1.26446+0.633359*i and v = 1.26446-0.633359*i or u =
1.26446-0.633359*i and v = 1.26446+0.633359*i or u =
0.83725+1.41173*i and v = -0.83725-1.41173*i or u = 0.83725-1.41173*i and v = -0.83725+1.41173*i or u = 1.18073+0.778374*i and v = -1.18073-0.778374*i or u = -1.18073-0.778374*i and v = 1.18073+0.778374*i
    
```

Also stimmen die sechs Lösungen für u mit den sechs Lösungen für v überein, die Paarung ist aber so, ein u und des dazugehörige v stets konjugiert komplex sind.

Bildet man nun sechsmal die Summe von einem u und dem zugehörigen v, so erhält man genau drei reelle Lösungen der gegebenen Gleichung.

2.3

### Zahlenbeispiel

Problem 3: Zahlenbeispiel für Cardano

$f(x) = x^3 - 3x + 1$  Fortg

$$x = \sqrt[3]{\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{9}\right)} + \sqrt[3]{\sqrt{3}} \quad \text{or} \quad x = \frac{1}{\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{9}\right) + \sqrt{3} + 1}$$

$$x = \frac{\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{9}\right) + \sqrt{3} + 1}{\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{9}\right) + \sqrt{3}}$$

`approx(solve(f(x)=0,x))`  $x = -1.87939$  or  $x = 0.347296$  or  $x = 1.53209$

`solve(x^3-3x-1,x)`  $x = -1.87939$  or  $x = 0.347296$  or  $x = 1.53209$  (mit Strg)

`nSolve(f(x)=0,x)` findet nicht alle

`nSolve(f(x)=0,x,2,1)`  $x = -1.87939$  man muss Grenzen angeben.

3.1

Nun soll der Weg von Tartaglia und Cardano gegangen werden.

$f(x) = x^3 - 3x + 1$

$x = u + v$  //  $x^3 = p x + q$  //  $p = 3u + v = 3$  // und  $q = u^3 + v^3 = -1$

```

solve({3*u-v=3, u^3+v^3=-1}, {u,v})
lo = cSolve({3*u-v=3, u^3+v^3=-1}, {u,v})
u = 0.766044+0.642788*i and v = 0.766044-0.642788*i or u =
0.766044-0.642788*i and v = 0.766044+0.642788*i or u =
0.173648+0.984808*i and v = 0.173648-0.984808*i or u = 0.173648-0.984808*i and v = 0.173648+0.984808*i
    
```

`angle(0.766044+0.642788*i)`  $0.698132$

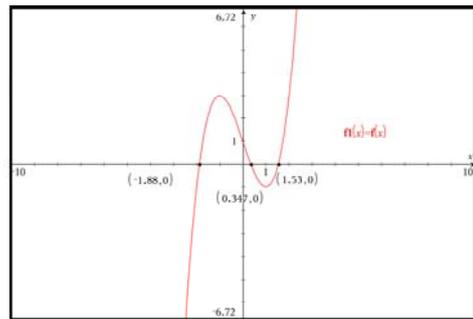
`approx(2*pi/9)`  $0.698132$  Dies ist also ein besondere Fall, w und w' sind schon die 3ten Einheitswurzeln,  $(0.766044+0.642788*i)^3 = \text{Polar} \cdot e^{2.0944*i} = -1$ , `approx(2*pi/3)`  $2.0944$

3.2

```

cSolve( $\frac{1}{u^3} + u^3 - 1, u$ )
• u=0.766044+0.642788i or u=0.766044-0.642788i or u=0.173648+0.984808i or u=0.173648-0.984808i or u=-0.939693+0.34202i or u=-0.939693-0.34202i
Dies sind die erwarteten sechs Lösungen, von denen man die passenden, die p=3 u v erfüllen addieren muss, um die reellen Lösungen zu erhalten.
solve(f(x)=0,x) • x=1.87939 or x=0.347296 or x=1.53209
0.766044+0.642788i • 1.53209
0.173648+0.984808i • 0.766044-0.642788i • 1.53209
-0.939693+0.34202i • 0.173648-0.984808i • 0.347296
-1.87939
    
```

3.3



3.4

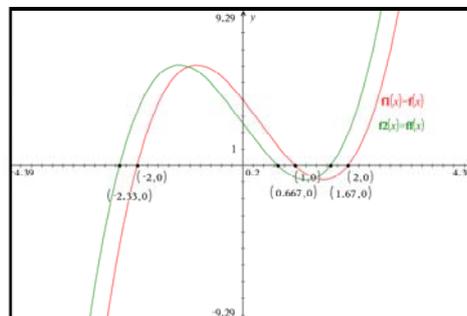
### Allg. Polynom 3 Grades anpassen...

**Problem 3 Allgemeine Polynom 3. Grades anpassen**  
 Die Cardano-Formeln aus Problem 1 erfordern  $x^3 - p \cdot x - q = 0$   
 Anpassung von Polynomen 3. Grades mit quadratischen Term an diese Form:  
 $f(x) = x^3 + a \cdot x^2 + b \cdot x + c$  • Fertig  
 Man muss den Wendepunkt waagrecht auf die y-Achse verschieben:  
 $x_{\text{W}} = -\text{zeros}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}(f(x))\right), x\right)\left[1\right] \cdot \frac{-a}{3}$   
 $f_{\text{card}}(x) = f(x + x_{\text{W}})$  • Fertig  
 $f_{\text{card}}(x) = x^3 + \frac{(a^2 - 3b) \cdot x}{3} + \frac{2 \cdot a^3}{27} - \frac{a \cdot b}{3} + c$

4.1

Die Cardano-Formeln aus Problem 1 erfordern  $x^3 - p \cdot x - q = 0$   
 Anpassung von Polynomen 3. Grades mit quadratischen Term an diese Form:  
 $f(x) = (x+2) \cdot (x-1) \cdot (x-2)$  • Fertig expand(f(x)) •  $x^3 - 3x^2 - 4x + 4$   
 Man muss den Wendepunkt waagrecht auf die y-Achse verschieben:  
 $x_{\text{W}} = -\text{zeros}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}(f(x))\right), x\right)\left[1\right] \cdot \frac{1}{3}$   
 $ff(x) = f(x + x_{\text{W}})$  • Fertig expand(ff(x)) •  $x^3 - \frac{13 \cdot x}{3} + \frac{70}{27}$   
 Also ist für die Cardano-Formeln  $p = \frac{13}{3}$  und  $q = \frac{70}{27}$   
 Siehe Graph-Fenster

4.2

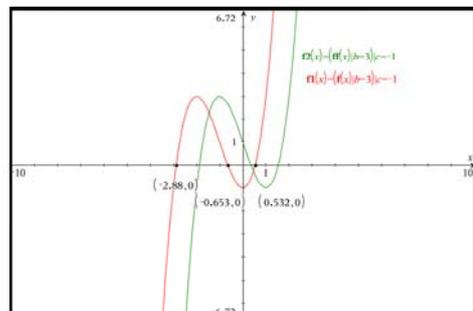


4.3

### Nochmal x^2 eliminieren

**Problem 4 Anpassung Sonderfall: kein x-Term**  
 Die Cardano-Formeln aus Problem 1 erfordern  $x^3 - p \cdot x - q = 0$   
 Anpassung von Polynomen 3. Grades mit quadratischen Term an diese Form:  
 $f(x) = x^3 + b \cdot x^2 + c$  • Fertig und nun  $ff(x) = \text{expand}\left(f\left(x - \frac{b}{3}\right)\right)$  • Fertig  
 $ff(x) = x^3 + \frac{b^2 \cdot x}{3} + \frac{2 \cdot b^3}{27} + c$   
 Wenn man den Zusammenhang mit der Wendepunktagekennt, überrascht diese Vorschlag der Formelsammlung nicht.  
 approx(cSolve((f(x)=0|b=3|c=1,x)) • x=2.87939 or x=0.652704 or x=0.532089  
 approx(cSolve((ff(x)=0|b=3|c=1,x)) • x=1.87939 or x=0.347296 or x=1.53209 um 1 verschoben:

5.1



5.2