Cardano Hauptbeispiel

Lösung von speziellen Gleichungen dritten Grades mit den

Cardanischen Formeln Genauer: mit dem Weg von Tartaglia.

www.mathematik−verstehen.de (Haftendorn 2013)

Das allgemeine Vorgehen im im zweiten Problem durchgeführt.

Hier speziell: $\mathbf{gl}:=x^3=6\cdot x+1$ ▸ $x^3=6\cdot x+1$

$\mathrm{solve}(\mathbf{gl},x)$ ▸ $x=^{-}2.36147$ or $x=^{-}0.167449$ or $x=2.52892$

Hier sieht man, dass Ti−CAS dieses sofort löst.

Stellt man jetzt auf Dokumenteinstellungen−> Berechnungsmodus−>exakt um.

verschwinden die drei Dezimalzahlen und es wird die exakte Lösung mit den Cardanischen Formeln angezeigt. Stelle dann wieder Berechnungsmodus −>Auto ein.

Diese Datei dient dazu, die Cardanischen Formeln nachzuvollziehen und zu verstehen.

1.1

Man ersetzt gl|x=u+v ▸ $(u+v)^3=6\cdot u+6\cdot v+1$ **gl** ▸ $x^3=6\cdot x+1$

expand(gl|x=u+v) ▸ $u^3+3\cdot u^2\cdot v+3\cdot u\cdot v^2+v^3=6\cdot u+6\cdot v+1$

Anders sortiert $3\,u\,v\,(u+v)+u^3+v^3=6(u+v)+1$ führt dies durch Vergleich zu

$3\,u\,v=6$ und $1=u^3+v^3$. Erstezt man hier v durch $\dfrac{6}{3\cdot u}$

$1=u^3+v^3|v=\dfrac{6}{3\cdot u}$ ▸ $1=u^3+\dfrac{8}{u^3}$ folgt eine tri−quadratische Gleichung mit w=u³

glw:=w=w²+8 ▸ $w=w^2+8$ Die kann man von Hand lösen:

cSolve(**glw**,w) ▸ $w=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{31}}{2}\cdot i$ or $w=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{31}}{2}\cdot i$ die Lösungen sind komplex.

Betrag von w **rw**:=$\sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{31}{4}}$ ▸ $2\cdot\sqrt{2}$ für den Argumentwinkel gilt $\tan(\theta)=\sqrt{31}$

Polardarstellung $w=\mathbf{rw}\;\mathbf{e}^{i\,\theta}$

1.2

Wegen $w=u^3$ ergeben sich aus jedem der beiden w drei komplexe Wurzeln.

$u1:=\sqrt[3]{\mathbf{rw}}\ \mathbf{e}^{\boldsymbol{i}\ \theta/3} \blacktriangleright \mathbf{e}^{\frac{\boldsymbol{i}\cdot\theta}{3}}\cdot\sqrt{2}$ $\quad u2:=\sqrt[3]{\mathbf{rw}}\ \mathbf{e}^{\boldsymbol{i}\ (\theta/3+2\ Pi/3)} \blacktriangleright \mathbf{e}^{\boldsymbol{i}\cdot\left(\frac{\theta}{3}+\frac{2\cdot\pi}{3}\right)}\cdot\sqrt{2}$

$u3:=\sqrt[3]{\mathbf{rw}}\ \mathbf{e}^{\boldsymbol{i}\ (\theta/3-2\ Pi/3)} \blacktriangleright -\mathbf{e}^{\boldsymbol{i}\cdot\left(\frac{\theta}{3}+\frac{\pi}{3}\right)}\cdot\sqrt{2}$

$u4:=\sqrt[3]{\mathbf{rw}}\ \mathbf{e}^{\boldsymbol{i}\ (-\theta/3)} \blacktriangleright \mathbf{e}^{\frac{-\boldsymbol{i}\cdot\theta}{3}}\cdot\sqrt{2}$ $\quad u5:=\sqrt[3]{\mathbf{rw}}\ \mathbf{e}^{\boldsymbol{i}\ (-\theta/3+2\ Pi/3)} \blacktriangleright -\mathbf{e}^{\frac{-\boldsymbol{i}\cdot(\theta+\pi)}{3}}\cdot\sqrt{2}$

$u6:=\sqrt[3]{\mathbf{rw}}\ \mathbf{e}^{\boldsymbol{i}\ (-\theta/3-2\ Pi/3)} \blacktriangleright \mathbf{e}^{\frac{-\boldsymbol{i}\cdot(\theta+2\cdot\pi)}{3}}\cdot\sqrt{2}$

Dazu gehören jeweils v mit v=2/u $\blacktriangleright v=\frac{2}{u}$ $\quad \mathbf{v1}:=2/\mathbf{u1} \blacktriangleright \mathbf{e}^{\frac{-\boldsymbol{i}\cdot\theta}{3}}\cdot\sqrt{2}$

Man sieht $\mathbf{v1}=\mathbf{u4}$ $\blacktriangleright$ true

1.3

Ebenso $\mathbf{v2}:=\dfrac{2}{\mathbf{u2}} \blacktriangleright \mathbf{e}^{\frac{-\mathbf{i}\cdot(\theta+2\cdot\pi)}{3}}\cdot\sqrt{2}$ $\mathbf{v2=u6} \blacktriangleright \text{true}$ $\mathbf{v3}:=\dfrac{2}{\mathbf{u3}} \blacktriangleright -\mathbf{e}^{\frac{-\mathbf{i}\cdot(\theta+\pi)}{3}}\cdot\sqrt{2}$

$\mathbf{v3=u5} \blacktriangleright \text{true}$ Da das Problem in u und v symmetrisch ist, war zu erwarten, dass dass die sechs vi als ganzes mit den sechs ui übereinstimmen.

$x1:=u1+v1 \blacktriangleright 2\cdot\cos\left(\frac{\theta}{3}\right)\cdot\sqrt{2}$ $\mathbf{x2}:=\mathbf{u2+v2} \blacktriangleright -2\cdot\sin\left(\frac{\theta}{3}+\frac{\pi}{6}\right)\cdot\sqrt{2}$ $\mathbf{x3}:=\mathbf{u3+v3} \blacktriangleright -2\cdot\cos\left(\frac{\theta}{3}+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\sqrt{2}$

Nun wird θ konkret eingesetzt aus $\mathbf{te}:=\tan^{-1}\left(\sqrt{31}\right) \blacktriangleright \tan^{-1}\left(\sqrt{31}\right)$ $\mathbf{te} \blacktriangleright 1.39309$

$\mathbf{x1}|\theta=\mathbf{te} \blacktriangleright 2.52892$ $\mathbf{x2}|\theta=\mathbf{te} \blacktriangleright -2.36147$ $\mathbf{x3}|\theta=\mathbf{te} \blacktriangleright -0.167449$

$\text{solve}(\mathbf{gl},x) \blacktriangleright x=-2.36147 \text{ or } x=-0.167449 \text{ or } x=2.52892$

1.4

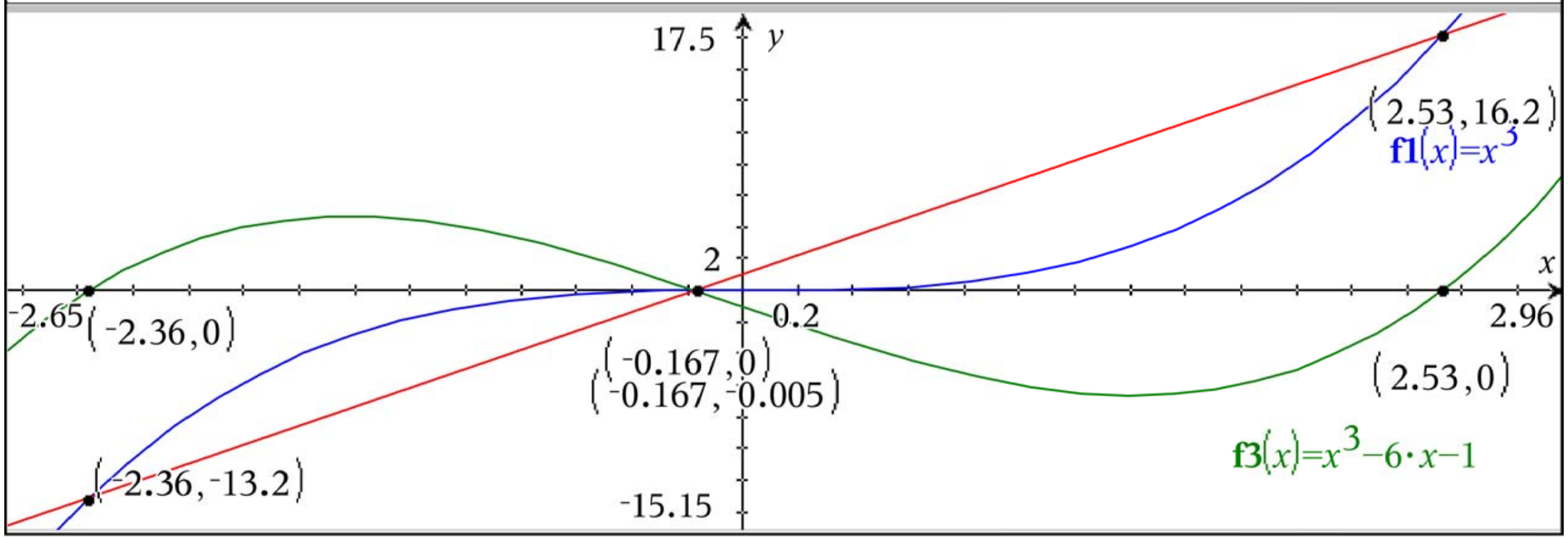
Cardano−Gleichungslösung Gelichung $x^3=6x+1$

$2\cdot\sqrt{2}\cdot\cos\left(\frac{te}{3.}\right) \blacktriangleright 2.52892$ $\quad 2\cdot\sqrt{2}\cdot\cos\left(\frac{te+2\cdot\pi}{3.}\right) \blacktriangleright -2.36147$

$2\cdot\sqrt{2}\cdot\cos\left(\frac{te-2\cdot\pi}{3.}\right) \blacktriangleright -0.167449$ nochmal von Hand mit cosinus allein.

$\text{solve}(x^3=6\cdot x+1,x) \blacktriangleright x=-2.36147 \text{ or } x=-0.167449 \text{ or } x=2.52892$

Man sieht im Graph−Fenster die passen Stellen auch.



1.5