Cardano Hauptbeispiel

Lösung von speziellen Gleichungen dritten Grades mit den Cardanischen Formeln Genauer: mit dem Weg von Tartaglia.

www.mathematik-verstehen.de (Haftendorn 2013)

Das allgemeine Vorgehen im im zweiten Problem durchgeführt.

Hier speziell: $\mathbf{gl}:=x^3=6\cdot x+1 \blacktriangleright x^3=6\cdot x+1$

$\text{solve}(\mathbf{gl},x) \blacktriangleright x=-2.36147 \text{ or } x=-0.167449 \text{ or } x=2.52892$

Hier sieht man, dass Ti-CAS dieses sofort löst.

Stellt man jetzt auf Dokumenteinstellungen-> Berechnungsmodus->exakt um. verschwinden die drei Dezimalzahlen und es wird die exakte Lösung mit den Cardanischen Formeln angezeigt. Stelle dann wieder Berechnungsmodus ->Auto ein.

Diese Datei dient dazu, die Cardanischen Formeln nachzuvollziehen und zu verstehen.

1.1

Man ersetzt $\text{gl}|x=u+v \blacktriangleright (u+v)^3=6\cdot u+6\cdot v+1$ $\quad \mathbf{gl} \blacktriangleright x^3=6\cdot x+1$

$\text{expand}(\text{gl}|x=u+v) \blacktriangleright u^3+3\cdot u^2\cdot v+3\cdot u\cdot v^2+v^3=6\cdot u+6\cdot v+1$

Anders sortiert $3\,u\,v\,(u+v)+u^3+v^3=6(u+v)+1$ führt dies durch Vergleich zu

$3\,u\,v=6$ und $1=u^3+v^3$. Erstezt man hier v durch $\frac{6}{3\cdot u}$

$1=u^3+v^3|v=\frac{6}{3\cdot u} \blacktriangleright 1=u^3+\frac{8}{u^3}$ folgt eine tri-quadratische Gleichung mit $w=u^3$

$\text{glw}:=w=w^2+8 \blacktriangleright w=w^2+8$ Die kann man von Hand lösen:

$\text{cSolve}(\mathbf{glw},w) \blacktriangleright w=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{31}}{2}\cdot i \text{ or } w=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{31}}{2}\cdot i$ die Lösungen sind komplex.

Betrag von w $\mathbf{rw}:=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{31}{4}} \blacktriangleright 2\cdot\sqrt{2}$ für den Argumentwinkel gilt $\tan(\theta)=\sqrt{31}$

Polardarstellung $w=\mathbf{rw}\ \mathbf{e}^{i\,\theta}$

1.2

Wegen $w=u^3$ ergeben sich aus jedem der beiden w drei komplexe Wurzeln.

$u1:=\sqrt[3]{\mathbf{rw}}\ \mathbf{e}^{i\,\theta/3} \blacktriangleright \mathbf{e}^{\frac{i\cdot\theta}{3}}\cdot\sqrt{2}$ $\quad u2:=\sqrt[3]{\mathbf{rw}}\ \mathbf{e}^{i\,(\theta/3+2\,Pi/3)} \blacktriangleright \mathbf{e}^{i\cdot\left(\frac{\theta}{3}+\frac{2\cdot\pi}{3}\right)}\cdot\sqrt{2}$

$u3:=\sqrt[3]{\mathbf{rw}}\ \mathbf{e}^{i\,(\theta/3-2\,Pi/3)} \blacktriangleright -\mathbf{e}^{i\cdot\left(\frac{\theta}{3}+\frac{\pi}{3}\right)}\cdot\sqrt{2}$

$u4:=\sqrt[3]{\mathbf{rw}}\ \mathbf{e}^{i\,(-\theta/3)} \blacktriangleright \mathbf{e}^{\frac{-i\cdot\theta}{3}}\cdot\sqrt{2}$ $\quad u5:=\sqrt[3]{\mathbf{rw}}\ \mathbf{e}^{i\,(-\theta/3+2\,Pi/3)} \blacktriangleright -\mathbf{e}^{\frac{-i\cdot(\theta+\pi)}{3}}\cdot\sqrt{2}$

$u6:=\sqrt[3]{\mathbf{rw}}\ \mathbf{e}^{i\,(-\theta/3-2\,Pi/3)} \blacktriangleright \mathbf{e}^{\frac{-i\cdot(\theta+2\cdot\pi)}{3}}\cdot\sqrt{2}$

Dazu gehören jeweils v mit v=2/u $\blacktriangleright v=\frac{2}{u}$ $\quad \mathbf{v1}:=2/\mathbf{u1} \blacktriangleright \mathbf{e}^{\frac{-i\cdot\theta}{3}}\cdot\sqrt{2}$

Man sieht $\mathbf{v1}=\mathbf{u4} \blacktriangleright \text{true}$

1.3

Ebenso $\mathbf{v2}:=\frac{2}{\mathbf{u2}} \blacktriangleright \mathbf{e}^{\frac{-i\cdot(\theta+2\cdot\pi)}{3}}\cdot\sqrt{2}$ $\quad \mathbf{v2}=\mathbf{u6} \blacktriangleright \text{true}$ $\quad \mathbf{v3}:=\frac{2}{\mathbf{u3}} \blacktriangleright -\mathbf{e}^{\frac{-i\cdot(\theta+\pi)}{3}}\cdot\sqrt{2}$

$\mathbf{v3}=\mathbf{u5} \blacktriangleright \text{true}$ Da das Problem in u und v symmetrisch ist, war zu erwarten, dass dass die sechs vi als ganzes mit den sechs ui übereinstimmen.

$x1:=u1+v1 \blacktriangleright 2\cdot\cos\left(\frac{\theta}{3}\right)\cdot\sqrt{2}$ $\quad \mathbf{x2}:=\mathbf{u2}+\mathbf{v2} \blacktriangleright -2\cdot\sin\left(\frac{\theta}{3}+\frac{\pi}{6}\right)\cdot\sqrt{2}$ $\quad \mathbf{x3}:=\mathbf{u3}+\mathbf{v3} \blacktriangleright -2\cdot\cos\left(\frac{\theta}{3}+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\sqrt{2}$

Nun wird θ konkret eingesetzt aus $\mathbf{te}:=\tan^{-1}(\sqrt{31}) \blacktriangleright \tan^{-1}(\sqrt{31})$ $\quad \mathbf{te} \blacktriangleright 1.39309$

$\mathbf{x1}|\theta=\mathbf{te} \blacktriangleright 2.52892$ $\quad \mathbf{x2}|\theta=\mathbf{te} \blacktriangleright -2.36147$ $\quad \mathbf{x3}|\theta=\mathbf{te} \blacktriangleright -0.167449$

$\text{solve}(\mathbf{gl},x) \blacktriangleright x=-2.36147 \text{ or } x=-0.167449 \text{ or } x=2.52892$

1.4

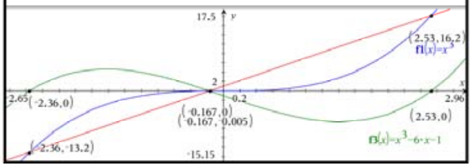
Cardano-Gleichungslösung Gelichung $x^3=6x+1$

$2\cdot\sqrt{2}\cdot\cos\left(\frac{\mathbf{te}}{3.}\right) \blacktriangleright 2.52892$ $\quad 2\cdot\sqrt{2}\cdot\cos\left(\frac{\mathbf{te}+2\cdot\pi}{3.}\right) \blacktriangleright -2.36147$

$2\cdot\sqrt{2}\cdot\cos\left(\frac{\mathbf{te}-2\cdot\pi}{3.}\right) \blacktriangleright -0.167449$ nochmal von Hand mit cosinus allein.

$\text{solve}(x^3=6\cdot x+1,x) \blacktriangleright x=-2.36147 \text{ or } x=-0.167449 \text{ or } x=2.52892$

Man sieht im Graph-Fenster die passen Stellen auch.



1.5