# Sammlung

von

Beispielen und Aufgaben

aus der

# allgemeinen Arithmetik und Algebra.

In systematischer Folge bearbeitet

für

Gymnasien, Realgymnasien, Oberrealschulen und Gewerbschulen

von

**Dr. Eduard Heis,**

weil. Prof. der Mathematik und Astronomie
an der Königlichen Akademie zu Münster.

93. bis 95. Auflage.

Köln, 1896.

Verlag der M. DuMont-Schauberg'schen Buchhandlung.

9) Die allgemeine Gleichung $x^n - ax^{n-1} + bx^{n-2} \ldots + t = 0$ in eine reduzierte zu verwandeln.

## B. Direkte Auflösungen der Gleichungen vom dritten Grade.

### § 95 a.

### Besondere Fälle der Gleichungen des dritten Grades.

1) $x^3 - 1 = 0$.
Aufl.: $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{1}{2}(1 - \sqrt{-3}) = J_1$, $x_3 = -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{-3}) = J_2$. (S. § 49, Nr. 18.)

2) $x^3 + 1 = 0$.
Aufl.: $x_1 = -1$, $x_2 = -J_1$, $x_3 = -J_2$.

3) $\alpha$) $x^3 \pm n^3 = 0$.
Aufl.: $x_1 = \mp n$, $x_2 = \mp nJ_1$, $x_3 = \mp nJ_2$.
$\beta$) $(a - x)^3 = (x - b)^3$.
Aufl.: $x_1 = \frac{1}{2}(a + b)$, $x_2$ und $x_3 = \frac{1}{2}(a + b) \pm \frac{1}{2}(a - b)\sqrt{-3}$.

4) Wenn $x^3 + Ax^2 + Bx$ die drei ersten Glieder des vollständigen Kubus einer zweiteiligen Größe enthalten soll, welche Beziehung muß alsdann zwischen $A$ und $B$ stattfinden?
Aufl.: $A^2 - 3B = 0$.

5) Die Gleichung $x^3 + Ax^2 + \frac{1}{3}A^2x = C$ aufzulösen*).
Aufl.: $x_1 = -\frac{1}{3}A + \sqrt[3]{C + \frac{1}{27}A^3}$, $x_2 = -\frac{1}{3}A + J_1\sqrt[3]{C + \frac{1}{27}A^3}$,
$x_3 = -\frac{1}{3}A + J_2\sqrt[3]{C + \frac{1}{27}A^3}$.

6) $x^3 - 12x^2 + 48x - 189 = 0$.
Aufl.: $x_1 = 9$, $x_2 = 1\frac{1}{2} - 2\frac{1}{2}\sqrt{-3}$, $x_3 = 1\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2}\sqrt{-3}$.

7) Welche Beziehung muß zwischen den Koeffizienten $m$, $n$ und $p$ stattfinden, damit die Gleichung $x^3 + mx^2 + nx + p = 0$ auf die Form $y^3 + qy = 0$ gebracht werden kann? Welche Beziehung findet zwischen den Wurzeln $x_1$, $x_2$, $x_3$ statt?
Aufl.: Es muß $2m^3 - 9mn + 27p = 0$ sein; die Wurzeln bilden eine arithmetische Progression und es ist $x_1 = -\frac{1}{3}m$, $x_2$ und $x_3 = -\frac{1}{3}m \pm \frac{1}{3}\sqrt{3(m^2 - 3n)}$.

8) $x^3 - 3bx^2 + (3b^2 - a^2)x - b(b^2 - a^2) = 0$.
Aufl.: $x_1 = b$, $x_2 = b + a$, $x_3 = b - a$.

9) $x^3 - 3(m + n)x^2 + (3m^2 + 6mn + 2n^2)x - m(m^2 + 3mn + 2n^2) = 0$.
Aufl.: $x_1 = m$, $x_2 = m + n$, $x_3 = m + 2n$.

---

*) Methoden, die allgemeine kubische Gleichung auf diese Form zu reduzieren, finden sich in Matthiessen, Grundzüge der antiken und modernen Algebra. Leipzig [1878] § 146 — 148.

## § 95 b.

### 1) Cardanische Formel*) und Formeln von Clausen und Hulbe.

$$x^3 + px + q = 0\text{**}).$$

$$x_1 = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q - \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3}}, \text{ oder}$$

$$x_1 = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q}\left[\sqrt[3]{-1 + \sqrt{1 + \tfrac{4}{27}\tfrac{p^3}{q^2}}} - \sqrt[3]{1 + \sqrt{1 + \tfrac{4}{27}\tfrac{p^3}{q^2}}}\right].$$

Bezeichnet man den ersten Summanden von $x_1$ mit $u$, den zweiten mit $v$, so sind die beiden anderen Wurzeln $x_2 = J_1 u + J_2 v = -\frac{1}{2}(u + v) + \frac{1}{2}i\sqrt{3}(u - v)$, $x_3 = J_2 u + J_1 v = -\frac{1}{2}(u + v) - \frac{1}{2}i\sqrt{3}(u - v)$. (Man vergleiche § 95 a Nr. 1.)

1) Wie ändert sich die Cardanische Formel um, wenn $x^3 + px - q = 0$, wie, wenn $x^3 - px + q = 0$, wie endlich, wenn $x^3 - px - q = 0$ gegeben ist?

2) Wenn $\alpha$ eine Wurzel der Gleichung $x^3 + px + q = 0$ ist, so sind die beiden anderen Wurzeln $-\frac{1}{2}\alpha \pm \sqrt{-\frac{3}{4}\alpha^2 - p}$. Warum? In welchem Falle sind die beiden anderen Wurzelwerte imaginär?

3) In welchem Falle erscheint der erste durch die Cardanische Formel sich ergebende Wurzelwert unter imaginärer Form?

4) $x^3 + 48x + 504 = 0$.
Aufl.: $x_1 = -6$, $x_2 = 3 + 5\sqrt{-3}$, $x_3 = 3 - 5\sqrt{-3}$.

5) $3x^3 + 4x + 7 = 0$.
Aufl.: $x_1 = -1$, $x_2$ und $x_3 = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{6}\sqrt{-3}$.

6) $x^3 - 21x - 344 = 0$.
Aufl.: $x_1 = 8$, $x_2$ und $x_3 = -4 \pm 3\sqrt{-3}$.

7) $x^3 - 3x + 2 = 0$.
Aufl.: $x_1 = -2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$.

8) $x^3 - 12x + 16 = 0$.
Aufl.: $x_1 = -4$, $x_2$ und $x_3 = 2$.

9) $x^3 - 9x + 28 = 0$.
Aufl.: $x_1 = -4$, $x_2$ und $x_3 = 2 \pm \sqrt{-3}$.

10) $x^3 - 60x + 671 = 0$.
Aufl.: $x_1 = -11$, $x_2$ und $x_3 = \frac{11}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-123}$.

---

*) Sollte eigentlich die Formel des Scipio Ferreo oder die Formel des Tartalea heißen. Nach Cardans eigenem Berichte (Ars magna, 1545) hatte Scipio Ferreo die Methode der Auflösung der Gleichungen des dritten Grades zuerst entdeckt; späterhin erfand dieselbe Tartalea selbständig.

**) Erste Auflösung mittels Kegelschnitte von Omar ben Ibrahim Alchayami (um 1080). L'algèbre d'Omar ben Ibrahim publ. et trad. par Woepcke. Paris 1851. Vgl. Grundzüge der antiken und modernen Algebra § 365.