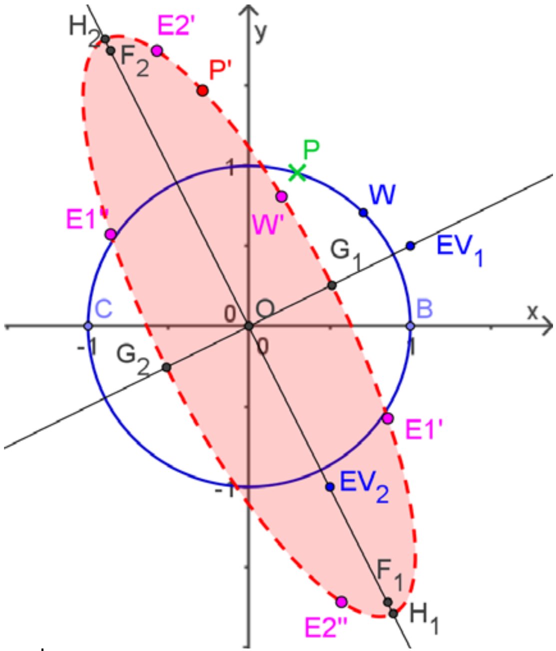
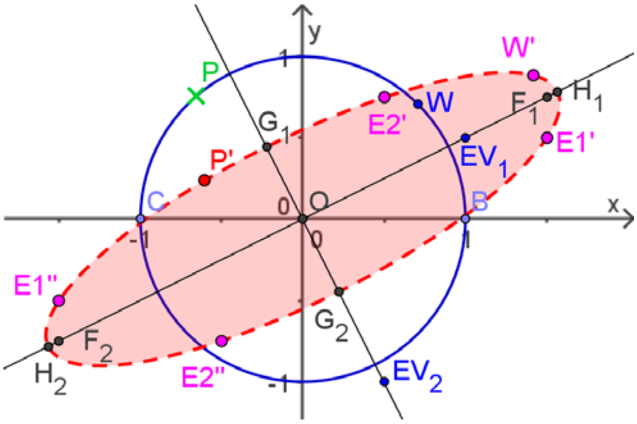
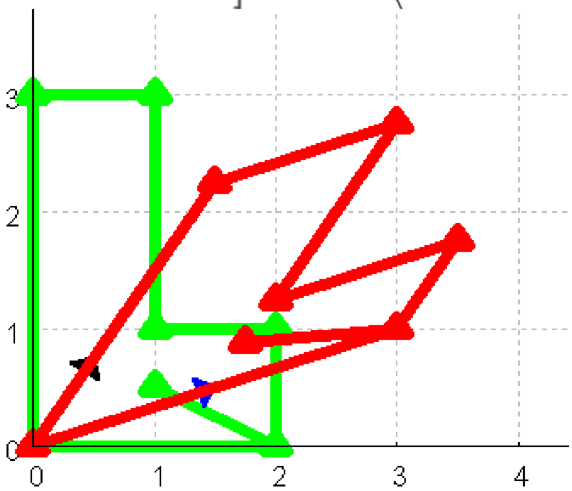
Lineare Abbildungen mit symmetrischem A. (invertierbar)

$$p' = Ap$$







$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

A ist symmetrisch,
A bildet das grüne L auf das verzerrte rote L ab.
Um zu sehen, in welchen Richtungen die größte bzw. die kleinste Verzerrung stattfinden, ist oben links gezeigt, welche Ellipse auf den Einheitskreis abgebildet wird. Oben rechts ist das Bild des Einheitskreises gezeigt. Im linken Bild ist handwerklich in GeoGebra P‘ das Bild von P mit der Inversen Matrix von A gezeigt. Die Bilder Ei‘ der vier Achsenschnittpunkte des Einheitskreises ergeben sich direkt aus der Matrix. Das Bild W‘ des sicheren Punktes W auf der Winkelhalbierenden wird direkt ausgerechnet.
Mit „Kegelschnitt aus fünf Punkten“ entsteht die Ellipse exakt. Mit „Brennpunkt[e]“ erhält man die Brennpunkte und daraus Haupt- und Nebenachse der Ellipse.

Satz:

Ist A symmetrisch und invertierbar, dann stimmen die Achsenrichtungen der beiden Ellipsen untereinander und mit den Eigenrichtungen der Matrix A überein.
Sei λ Eigenwert der Matrix A.

Sei $p^T S\, p = 1$ die linke Ellipse und $p^T Q\, p = 1$ die rechte, dann gilt:

$S = A^T A = A^2$ und $Q = A^{-1\,T} A^{-1} = A^{-2}$

Es ist λ^2 Eigenwert von S und die Halbachsen links sind λ^{-1}.

Es ist λ^{-2} Eigenwert von Q und die Halbachsen rechts sind direkt λ

Beweis folgt

Beweis

Zu Sei $p^T S\, p = 1$ die linke Ellipse und $p^T Q\, p = 1$ die rechte, dann gilt:

$S = A^T A = A^2$ und $Q = A^{-1\,T} A^{-1} = A^{-2}$

siehe „Besondere Scherung mit goldenem Schnitt“, Datei scherung-golden.pdf

Sei $A = A^T \Rightarrow S = A^T A = A^2 \qquad Q = A^{-1\,T} A^{-1} = A^{-2}$

v EV von A $\quad Av = \lambda v \Rightarrow Sv = AAv = \lambda Av = \lambda^2 v \quad \Rightarrow$ v EV von S, λ^2 EW von S

λ EW von A

$v = \lambda A^{-1} v \qquad A^{-1}$ hat v als EV zum EW $\frac{1}{\lambda}$

$Q = A^{-1\,T} A^{-1} = A^{-1} \cdot A^{-1} \qquad Qv = A^{-1} A^{-1} v = \frac{1}{\lambda} A^{-1} v = \frac{1}{\lambda^2} v$

$\Rightarrow$ Q hat auch v als EV aber $\frac{1}{\lambda^2}$ als EW

Ellipse S in Hauptlage $\lambda_1^2 x^2 + \lambda_2^2 y^2 = 1 \qquad \frac{x^2}{\frac{1}{\lambda_1^2}} + \frac{y^2}{\frac{1}{\lambda_2^2}} = 1$

Halbachsen $\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}$

Ellipse Q in Hauptlage $\frac{x^2}{\lambda_1^2} + \frac{y^2}{\lambda_2^2} = 1$ Halbachsen λ_1, λ_2

Diese Berechnungen extra in maxima "affin 2d"

$A = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3/4 \end{pmatrix} \qquad \lambda_1 = \frac{7}{4} \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \lambda_2 = \frac{1}{2} \quad v_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$

Anwendung des Satzes

Q EW $q_1 = \frac{16}{49} \quad q_2 = 4$ gedrehte Ell. $\frac{16}{49} x^2 + 4y^2 = 1$

$a^2 = \frac{49}{16} = \frac{1}{q_1} = \lambda_1^2 \Rightarrow a = \lambda_1 \qquad \frac{x^2}{\frac{49}{16}} + \frac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1$

$b = \lambda_2 = \frac{1}{2}$

$A^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix} \qquad$ EW von S $\quad s_1 = \frac{49}{16} \quad s_2 = \frac{1}{4}$

Ellipse $p^T S p = 1$ in Hauptlage $\frac{49}{16} x^2 + \frac{1}{4} y = 1 \qquad \frac{x^2}{(\frac{4}{7})^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$