Affine Abbildungen, Grundlage

Affine Abbildungen

www.mathematik−verstehen.de Haftendorn 2012

Definition: Gegeben sei ein m−dimensionaler Vektorraum VR_m über einem Körper K.

Dann wird mit einer **nxm−Matrix A** mit Elementen aus K eine **lineare Abbildung** in einen n−dimensionalen VR_n definiert durch: $v\_:=A\cdot v$.

Handelt es sich um eine Abbildung eine Vektorraumes in sich selbst, spricht man von **linearer Transformation.** Betrachtet die Vektoren in einem **Punktraum**, so kann noch eine Translation mit dem Vektor tr hinzukommen und die Abbildung

$p\_:=A\cdot v+tr$ heißt **affine Abbildung**. In geometrischer Deutung sind affine Abbildungen charakterisiert durch **Parallelentreue und Teilverhältnistreue.**

D.h. die Bilder von Parallelen sind wieder Parallelen und Teilungsverhältnisse im Bild sind die gleichen wie im Urbild. (Beweise auf den Vorlesungsfolien)

In diese Datei sind zunächst Urbild− und Bildraum der R^2. Weiter werden erste Schritte im R^3 gemacht. Projektionen sind hier die wichtigen Abbildungen von R^3 auf R^2.

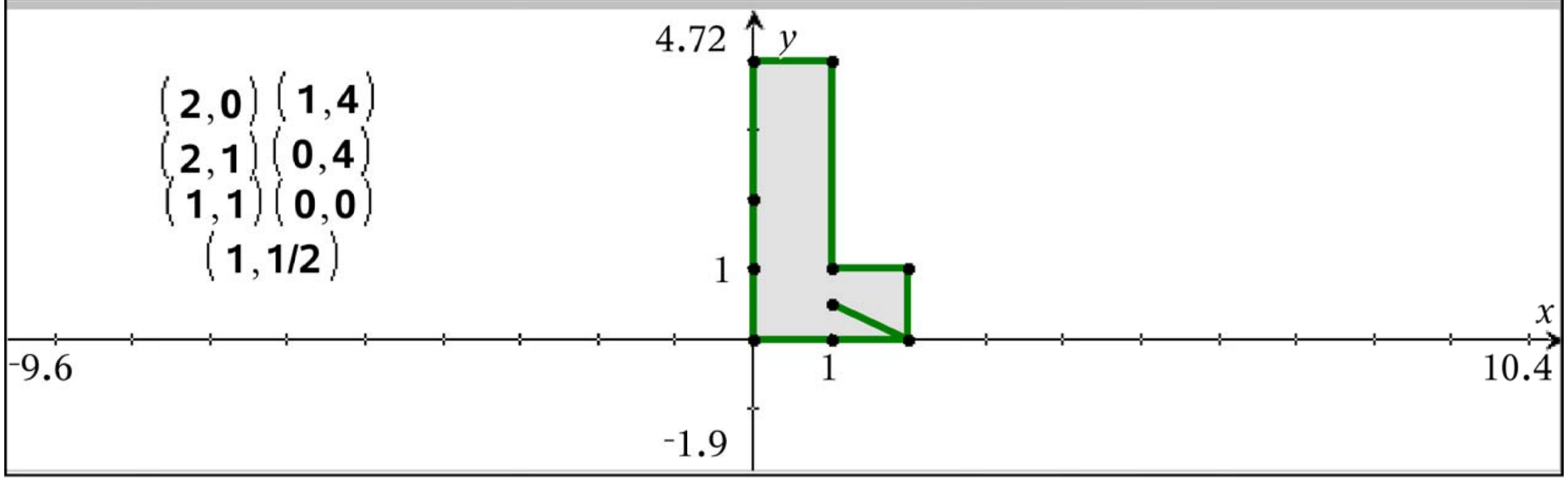
1.1

Es hat sich bewährt, beim Verstehen ein ungleichmäßiges L als Urbild zu betrachten und die Wirkung der Abbildung an der Verzerrung des L zu studieren.

$\mathbf{p1x}:=2 \blacktriangleright 2$ $\mathbf{p1y}:=0 \blacktriangleright 0$ $\mathbf{p2x}:=2 \blacktriangleright 2$ $\mathbf{p2y}:=1 \blacktriangleright 1$ $\mathbf{p3x}:=1 \blacktriangleright 1$ $\mathbf{p3y}:=1 \blacktriangleright 1$ $\mathbf{p4x}:=1 \blacktriangleright 1$
$\mathbf{p4y}:=4 \blacktriangleright 4$ $\mathbf{p5x}:=0 \blacktriangleright 0$ $\mathbf{p5y}:=4 \blacktriangleright 4$ $\mathbf{p6x}:=0 \blacktriangleright 0$ $\mathbf{p6y}:=0 \blacktriangleright 0$ $\mathbf{p7x}:=2 \blacktriangleright 2$ $\mathbf{p7y}:=0 \blacktriangleright 0$

$\mathbf{p8x}:=1 \blacktriangleright 1$ $\mathbf{p8y}:=\frac{1}{2} \blacktriangleright \frac{1}{2}$

$$\text{Urbild} \quad \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 4 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$



1.2

Abbildungsmatrix $\mathbf{aa}:=\begin{bmatrix}\frac{3}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4}\end{bmatrix}$

$\mathbf{myb}:=\mathbf{aa}\cdot\mathbf{myur} \blacktriangleright \begin{bmatrix}3 & \frac{7}{2} & 2 & \frac{7}{2} & 2 & 0 & 3 & \frac{7}{4}\\ 1 & \frac{7}{4} & \frac{5}{4} & \frac{7}{2} & 3 & 0 & 1 & \frac{7}{8}\end{bmatrix}$

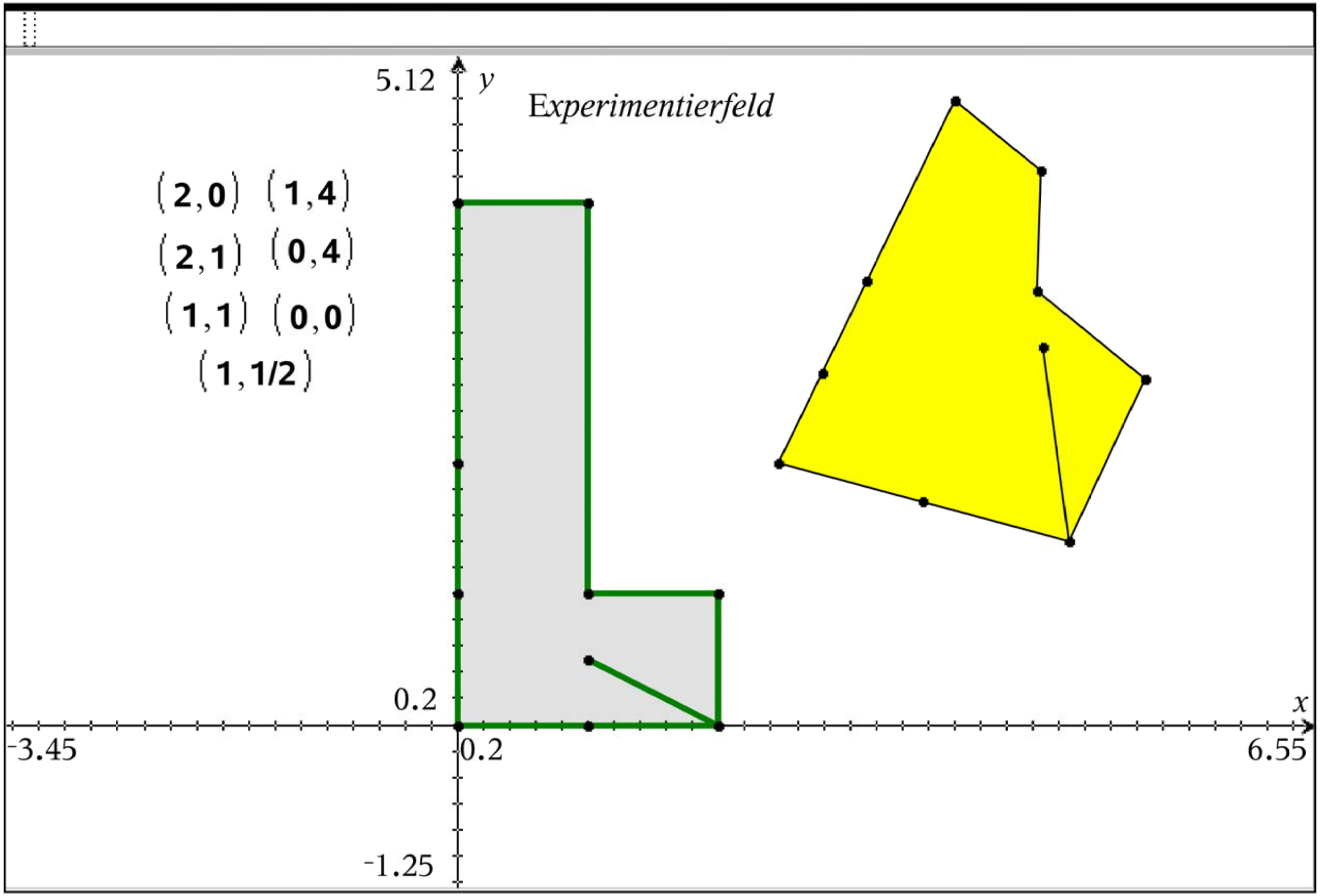
$\mathbf{b1x}:=\mathbf{myb}[1,1] \blacktriangleright 3$ $\mathbf{b1y}:=\mathbf{myb}[2,1] \blacktriangleright 1$ $\mathbf{b2x}:=\mathbf{myb}[1,2] \blacktriangleright \frac{7}{2}$ $\mathbf{b2y}:=\mathbf{myb}[2,2] \blacktriangleright \frac{7}{4}$

$\mathbf{b3x}:=\mathbf{myb}[1,3] \blacktriangleright 2$ $\mathbf{b3y}:=\mathbf{myb}[2,3] \blacktriangleright \frac{5}{4}$ $\mathbf{b4x}:=\mathbf{myb}[1,4] \blacktriangleright \frac{7}{2}$ $\mathbf{b4y}:=\mathbf{myb}[2,4] \blacktriangleright \frac{7}{2}$

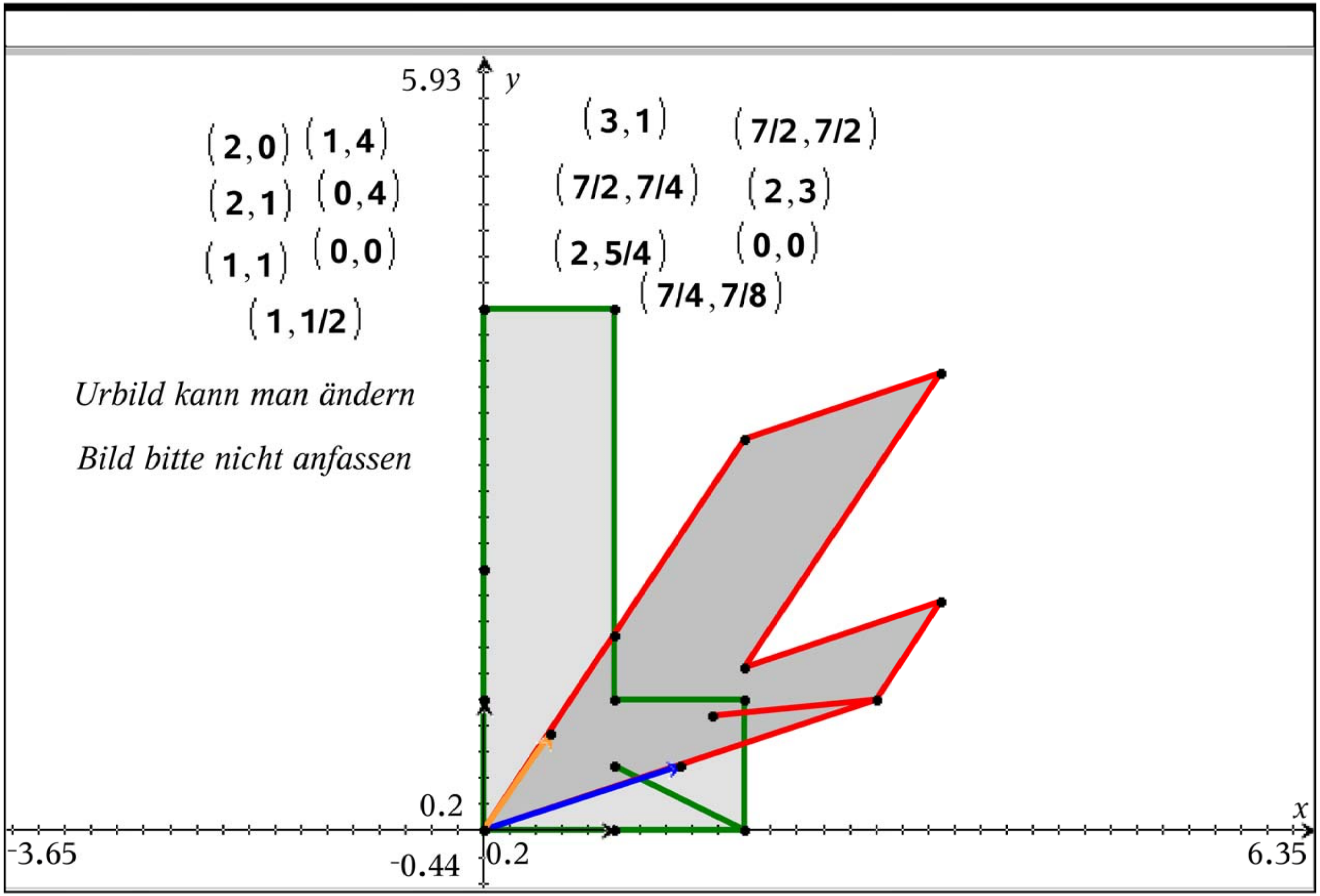
$\mathbf{b5x}:=\mathbf{myb}[1,5] \blacktriangleright 2$ $\mathbf{b5y}:=\mathbf{myb}[2,5] \blacktriangleright 3$ $\mathbf{b6x}:=\mathbf{myb}[1,6] \blacktriangleright 0$ $\mathbf{b6y}:=\mathbf{myb}[2,6] \blacktriangleright 0$

$\mathbf{b7x}:=\mathbf{myb}[1,7] \blacktriangleright 3$ $\mathbf{b7y}:=\mathbf{myb}[2,7] \blacktriangleright 1$ $\mathbf{b8x}:=\mathbf{myb}[1,8] \blacktriangleright \frac{7}{4}$ $\mathbf{b8y}:=\mathbf{myb}[2,8] \blacktriangleright \frac{7}{8}$

1.3


5.12
y
Experimentierfeld
(2,0) (1,4)
(2,1) (0,4)
(1,1) (0,0)
(1,1/2)
0.2
x
-3.45
0.2
6.55
-1.25

1.4


5.93
y
(3,1)
(7/2,7/2)
(2,0) (1,4)
(2,1) (0,4)
(7/2,7/4)
(2,3)
(1,1) (0,0)
(2,5/4)
(0,0)
(7/4,7/8)
(1,1/2)
Urbild kann man ändern
Bild bitte nicht anfassen
0.2
x
-3.65
-0.44
0.2
6.35

1.5